Questions de compacité

[1.] La démonstration du résultat suivant est l'occasion de passer en revue quelques propriétés des parties compactes.

> *Toute partie fermée d'un espace vectoriel de dimension finie* E *est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'éléments de* E.

Autrement dit, si la partie A est fermée, alors il existe une famille dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A qui est dense dans A.

[2.] Nous distinguerons les propriétés très générales (valables dans tous les espaces vectoriels normés et même dans tous les espaces métriques) des propriétés particulières aux espaces vectoriels normés de dimension finie.

Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel sur lequel est définie une norme $\|\cdot\|$. Les boules, les voisinages et les ouverts sont définis au moyen de cette norme.

Un **espace métrique** est un ensemble sur lequel est définie une distance d. Ici encore, les boules, les voisinages et les ouverts sont définis au moyen de cette distance.

Sur un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$, on dispose de la distance d définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. Mais un espace métrique n'est pas nécessairement un espace vectoriel...

Un **espace topologique** est un ensemble X dans lequel on a choisi une **topologie**, c'est-à-dire une famille de parties $\mathcal{T} = (O_i)_{i\in I}$ qui contient l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble plein X, qui est stable par intersection quelconque et par union finie. Les ouverts de l'espace topologique sont alors, par définition, les éléments de $\mathcal{T}$. On peut alors définir les voisinages de chaque point de E puis les fonctions continues (définies sur E ou à valeurs dans E). Sans norme, ni distance. On frémit rien que d'y penser.

[3.] La **Propriété de Bolzano-Weierstrass** caractérise les parties compactes d'un espace métrique.

> *Soit* (E, d)*, un espace métrique. Une partie* A *de* E *est* ***compacte*** *si, et seulement si, de toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A*, on peut extraire une sous-suite* $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* $\ell \in E$.

[4.] Un espace métrique est **séparé** (**Hausdorff space** en VO) : étant donnés deux points distincts x et y de E, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y qui sont disjoints ($V_x \cap V_y = \varnothing$).

Cette propriété assure en particulier l'unicité de la limite pour toute suite convergente. Certains espaces topologiques ne sont pas séparés. On frémit rien que d'y penser.

❧ La **propriété de Borel-Lebesgue** caractérise les parties compactes d'un espace topologique séparé.

> *Soit* $(E, \mathcal{T})$*, un espace topologique séparé. Une partie* A *de* E *est* ***compacte*** *si, et seulement si, de tout recouvrement ouvert de* A *on peut extraire un recouvrement fini.*

Autrement dit, si $(\omega_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i,$$

alors il existe une partie *finie* $J \subset I$ telle que

$$A \subset \bigcup_{i\in J} \omega_i.$$

Propriété de Borel-Lebesgue dans un espace métrique

[5.] Soient (E, d), un espace métrique et $A \subset E$, une partie compacte de E. Nous allons démontrer que la propriété de Borel-Lebesgue est vérifiée par A et pour cela, nous allons dans un premier temps démontrer le **lemme de Lebesgue**.

> *Soit A, une partie compacte de l'espace métrique (E, d). On suppose connu un recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de A :*
> $$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$
> *Alors il existe un réel $r > 0$ tel que*
> $$\forall\, x \in A,\ \exists\, i \in I, \qquad B(x, r) \subset O_i.$$

❧ Par hypothèse, pour tout $y \in A$, il existe (au moins) un indice $i \in I$ tel que $y \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, c'est un voisinage de y et il existe donc un réel $r_y > 0$ tel que O_i contienne la boule ouverte $\omega_y = B(y, r_y)$ de centre y et de rayon r_y.

On dispose ainsi d'un recouvrement de A par des boules ouvertes :

$$A \subset \bigcup_{y \in A} \omega_y$$

et chaque boule ouverte ω_y est contenue dans l'un des ouverts O_i.

Il s'agit maintenant de prouver qu'il existe un réel $r > 0$, indépendant de $x \in A$, tel que
$$\forall\, x \in A,\ \exists\, y \in A, \qquad B(x, r) \subset \omega_y.$$

✍ *Il ne s'agit bien entendu pas de démontrer que $B(x, r) \subset \omega_x$ car le rayon r_x de ω_x peut être strictement inférieur à r !*

❧ On raisonne par l'absurde en supposant que

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, x \in A,\ \forall\, y \in A, \qquad B(x, r) \not\subset \omega_y.$$

Il revient au même de supposer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x_n \in A,\ \forall\, y \in A, \qquad B(x_n, 1/n) \not\subset \omega_y.$$

✍ *Dans un espace métrique, chaque point admet une* ***base dénombrable de voisinages*** *: une partie V de E est un voisinage de x si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la boule $B(x, 1/n)$ soit contenue dans V.*

Certains espaces topologiques n'admettent pas de ***base dénombrable de voisinages****. On frémit rien que d'y penser.*

D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, extraite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$, qui converge vers $\ell \in A$. Comme

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_{\varphi(k)}, \ell) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\varphi(k)} = 0$$

et que, par hypothèse, $r_\ell > 0$, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant k_0, \qquad d(x_{\varphi(k)}, \ell) + \frac{1}{\varphi(k)} < r_\ell.$$

On en déduit (par inégalité triangulaire) que

$$\forall\, k \geqslant k_0, \qquad B\Big(x_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)}\Big) \subset B(\ell, r_\ell) = \omega_\ell,$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

[6.] Nous allons en déduire la propriété de Borel-Lebesgue.

On considère une partie compacte A de E et un recouvrement ouvert de A, c'est-à-dire une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ telle que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Le lemme de Lebesgue nous donne un réel $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, i \in I, \qquad B(x, r) \subset O_i.$$

❧ La propriété de Borel-Lebesgue est logiquement vraie (et mathématiquement stupide) dans le cas où A est vide. On suppose dans la suite que $A \neq \varnothing$ et on choisit un élément quelconque $x_1 \in A$.

Il n'y a que deux possibilités : ou bien $A \subset B(x_1, r)$, ou bien il existe un élément $x_2 \in A$ tel que $x_2 \notin B(x_1, r)$.

Dans le second cas, il n'y a que deux possibilités : ou bien $A \subset B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$, ou bien il existe un élément $x_3 \in A$ tel que $x_3 \notin B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$.

On en déduit (par récurrence) qu'il n'y a que deux possibilités :

❧ Ou bien il existe un entier n et des éléments $x_1, \dots, x_n$ de A tels que

$$A \subset B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r)$$

et comme chaque boule $B(x_k, r)$ est contenue dans un ouvert ω_i, il existe des indices $i_1, \dots, i_n$ dans I tels que

$$A \subset \omega_{i_1} \cup \cdots \cup \omega_{i_n}.$$

L'objectif est atteint !

❧ Ou bien il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A tels que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad x_n \notin B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_{n-1}, r).$$

D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\theta \in A$. Comme $r/3 > 0$, il existe un rang $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad d(x_{\psi(k)}, \theta) \leqslant \frac{r}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, si $K_0 \leqslant k_1 < k_2$, alors

$$d(x_{\psi(k_1)}, x_{\psi(k_2)}) \leqslant d(x_{\psi(k_1)}, \theta) + d(\theta, x_{\psi(k_2)}) \leqslant \frac{2r}{3}.$$

Mais $\psi(k_1) < \psi(k_2)$ et par conséquent

$$x_{\psi(k_2)} \notin B(x_1, r) \cup \cdot \cup B(x_{\psi(k_1)}, r) \cup \cdots \cup B(x_{\psi(k_2 - 1)}, r).$$

donc en particulier $d(x_{\psi(k_2)}, x_{\psi(k_1)}) \geqslant r$. C'est contradictoire, donc seul le premier cas est envisageable.

Cas d'une partie compacte

[7.] Considérons ici une partie compacte A (non vide !) d'un espace métrique (E, d).

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le rayon $r_n = 2^{-n}$ est strictement positif et on connaît un recouvrement ouvert évident de A :

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_n).$$

D'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire un recouvrement fini. Il existe donc une partie finie

$$\{x_{n,0}, \dots, x_{n,N_n}\} \subset A$$

telle que

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{N_n} B(x_{n,k}, r_n).$$

❧ Considérons alors la partie

$$A^{\gamma} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{n,0}, \dots, x_{n,N_n}\}.$$

C'est une partie finie ou dénombrable de A (union dénombrables de parties finies) et, par construction, pour tout $\ell \in A$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, 0 \leqslant k \leqslant N_n,\ \exists\, u_n \in B(x_{n,k}, r_n), \qquad d(u_n, \ell) \leqslant r_n.$$

Ainsi, la partie A est contenue dans l'adhérence de A^{γ}.

Comme $A^\gamma \subset A$ et que A est fermée (puisque compacte), on en déduit que A est exactement l'adhérence de la partie (finie ou) dénombrable A^γ.

✍ *La conclusion repose de manière essentielle sur l'existence d'une base dénombrable de voisinages : pour exprimer qu'une suite converge, il n'est pas nécessaire de considérer* tous *les $\varepsilon > 0$, il suffit de considérer une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive et de limite nulle.*

Cas d'une partie fermée

[8.] Pour étendre le résultat que nous venons de démontrer aux parties fermées, nous allons passer des espaces métriques aux espaces vectoriels normés de dimension finie.

❧ Pour tout espace métrique (E, d), quel que soit le point $x_0 \in E$,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_0, n).$$

En effet, la distance d'un point quelconque x à x_0 est un réel, donc $x \in \overline{B}(x_0, n)$ pour tout entier n assez grand (= assez grand pour dépasser $d(x, x_0)$).

❧ Dans tout espace métrique, la boule fermée $\overline{B}(x_0, n)$ est une partie fermée et bornée, mais ce n'est pas nécessairement une partie compacte !

Plus précisément, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, les boules fermées $\overline{B}(x_0, n)$ sont compactes si, et seulement si, la dimension de E est finie selon un théorème de F. Riesz (`fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Riesz#Théorème_de_Riesz`).

[9.] Soient $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel de dimension finie et A, une partie fermée de E.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la partie

$$A_n = A \cap \overline{B}(0_E, n)$$

est compacte (intersection d'une partie fermée et d'une partie compacte) et on a démontré qu'il existait une partie finie ou dénombrable A_n^γ de A_n dont l'adhérence était égale à A_n.

On pose alors

$$A^\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\gamma.$$

L'ensemble A^γ est une partie finie ou dénombrable (union dénombrable de parties finies ou dénombrables) de A. De plus,

$$\overline{A^\gamma} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n^\gamma} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$$

et comme la partie A est fermée et contient A^γ, on a aussi $\overline{A^\gamma} \subset A$, d'où l'égalité :

$$\overline{A^\gamma} = A.$$

✍ *Quelles que soient les parties X_n ($n \in \mathbb{N}$), l'adhérence de*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

est une partie fermée qui contient tous les X_n, donc elle contient tous les $\overline{X_n}$, d'où l'inclusion

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n} \subset \overline{X}.$$

L'inclusion réciproque est fausse en général :

$$\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}]1/n, 1 - 1/n[} = \overline{]0, 1[} = [0, 1], \qquad \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{]1/n, 1 - 1/n[} = \bigcup_{n\geqslant 1} [1/n, 1 - 1/n] =]0, 1[.$$