Séries de fonctions

Exercice 1

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement.

1. La suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\lambda f + g$.

2. Si les fonctions f_n et g_n sont des fonctions bornées sur Ω, alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers fg.

Exercice 2

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de fonctions continues sur Ω qui convergent uniformément sur Ω vers f et g respectivement. Alors la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de Ω vers fg.

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de I dans Ω qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \Omega$.

1. Quelle que soit la fonction $\psi : J \to I$, la suite de fonctions $(f_n \circ \psi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers $f \circ \psi$.

2. Si φ est uniformément continue sur Ω, alors la suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\varphi \circ f$.

Exercice 4

1. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Le produit $xS(x)$ tend vers $\pi^2/6$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3.

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} \sim -\ell n\, x.$$

Exercice 5

1. La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

est croissante et continue sur $]-1, +\infty[$.

2. Pour tout $x > -1$,

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$$

et $S(x) \sim -1/(1+x)$ lorsque x tend vers -1.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S(n) = H_n$ et $S(x) \sim \ell n\, x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Pour tout $x \in \Omega =]-1, +\infty[$ et tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Exercice 6

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell n(1 + n^2 x^2)}{n^3}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7

La fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8

1. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}_+$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

est définie.

2. Vérifier que $S(x) = S(1/x)$ pour tout x dans l'ensemble de définition de S.

3. Étudier la continuité et les variations de S.

Exercice 9

Étudier la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ell n(n + e^{nx})}{n^3}.$$

Exercice 10

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

2. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3. Démontrer que $S(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Calculer un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 11

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur l'intervalle borné $]a, b[$, qui converge uniformément sur $]a, b[$. Alors la série numérique

$$\sum \int_a^b u_n(t)\,dt$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt.$$

Exercice 12

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ en posant :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = \left| \begin{array}{ll} n\sqrt{n}\, t & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1/\sqrt{t} & \text{pour } 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$, mais ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer de deux manières différentes la limite de

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 13

Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $|q| < 1$. Il existe une, et une seule, fonction f définie sur $]-1, 1[$, continue en 0, telle que $f(0) = 1$ et que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx).$$

Exercice 14

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une expression de f en tant que somme d'une série de fonctions.
4. Retrouver cette expression d'une autre manière.

Exercice 15 — 132 – 1119

On étudie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ell n\, n}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions.
2. Soit $A > 0$. Démontrer qu'il existe une constante M telle que

$$\forall\, x \in [0, A], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ell n\, k} \right| \leqslant \frac{M}{\ell n\, n}.$$

Que peut-on en déduire ?
3. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k}.$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

Séries de fonctions (Solutions)

Solution 1

1. ✍ *Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f - f_n$ et $g - g_n$ sont bornées sur Ω et*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|g - g_n\|_\infty = 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\big|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f_n + g_n)(x)\big| &= \big|\lambda\big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(g(x) - g_n(x)\big)\big| \\ &\leqslant |\lambda|\,\big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|g(x) - g_n(x)\big| \\ &\leqslant |\lambda|\,\|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty\end{aligned}$$

puisque la borne supérieure est un majorant.

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (combinaison linéaire de deux suites de limite nulle), on a donc établi que la suite de fonctions $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur Ω vers la fonction $(\lambda f + g)$.

2. ✍ *Comme les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur Ω, ces fonctions sont uniformément bornées : il existe deux constantes M_f et M_g telles que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|_\infty \leqslant M_f \quad \textit{et} \quad \|g_n\|_\infty \leqslant M_g.$$

En posant $M_0 = \max\{M_f, M_g\}$, on obtient une constante qui majore les deux suites de fonctions :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|_\infty \leqslant M_0 \quad \textit{et} \quad \|g_n\|_\infty \leqslant M_0$$

ainsi que leurs limites simples respectives :

$$\|f\|_\infty \leqslant M_0, \qquad \|g\|_\infty \leqslant M_0$$

(puisque les inégalités larges sont conservées par convergence simple).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$. L'astuce taupinale (classique à chaque fois qu'on étudie la convergence d'un *produit*) et l'inégalité triangulaire nous donnent :

$$\begin{aligned}\big|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)\big| &= \big|f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)\big| \\ &\leqslant \big|f_n(x)\big[g_n(x) - g(x)\big]\big| + \big|\big[f_n(x) - f(x)\big]g(x)\big| \\ &\leqslant \|f_n\|_\infty\|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty\|g\|_\infty \qquad (\star) \\ &\leqslant M_0\big(\|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty\big),\end{aligned}$$

l'inégalité $(\star)$ découlant une fois de plus du fait que la borne supérieure est un majorant.

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \Omega$ et, lorsque n tend vers $+\infty$, ce majorant tend vers 0, donc on a prouvé que la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur Ω vers la fonction fg.

Solution 2

Considérons un segment $[A, B]$ contenu dans Ω.

Comme les fonctions f_n et g_n sont *continues* sur le *segment* $[A, B]$, elles sont toutes bornées sur ce segment. Comme les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur le segment $[A, B]$, on en déduit qu'il s'agit de deux suites de fonctions bornées qui convergent uniformément sur $[A, B]$, respectivement vers les fonctions f et g.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[A, B]$ vers le produit fg.

On a ainsi démontré que la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur tout segment de Ω vers la fonction fg.

Solution 3

1. ✍ *On fera attention à ne pas confondre les deux normes uniformes utilisées ici !*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} \bigl|f(x)\bigr| \qquad \textit{pour } f\,:\, I \to \mathbb{R}$$
$$N_\infty(\psi) = \sup_{t\in J} \bigl|\psi(t)\bigr| \qquad \textit{pour } \psi\,:\, J \to \mathbb{R}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.Par définition,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|$$

c'est-à-dire

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\bigl\{\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|,\ x \in I\bigr\}.$$

De même,

$$\begin{aligned} N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) &= \sup\bigl\{\bigl|f_n\bigl(\psi(t)\bigr) - f\bigl(\psi(t)\bigr)\bigr|,\ t \in J\bigr\} \\ &= \sup\bigl\{\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|,\ x \in \psi_*(J)\bigr\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$\psi_*(J) \subset I$$

et par croissance de l'opérateur sup,

$$N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) \leqslant \|f_n - f\|_\infty.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant N_\infty(f_n \circ \psi - f \circ \psi) \leqslant \|f_n - f\|_\infty$$

et comme l'énoncé suppose que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut déduire du théorème d'encadrement que la suite de fonctions $(f_n \circ \psi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers la fonction $f \circ \psi$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction φ est uniformément continue sur Ω, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, (y, z) \in \Omega^2, \quad |y - z| \leqslant \alpha \implies \bigl|\varphi(y) - \varphi(z)\bigr| \leqslant \varepsilon$$

et, par hypothèse de convergence uniforme, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha.$$

Les fonctions f et f_n prennent leurs valeurs dans Ω. Par conséquent, pour tout $x \in I$, on peut poser $y = f_n(x)$ et $z = f(x)$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on sait que

$$|y - z| = \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \leqslant \alpha$$

et donc que

$$\bigl|\varphi(y) - \varphi(z)\bigr| = \bigl|\varphi\bigl(f_n(x)\bigr) - \varphi\bigl(f(x)\bigr)\bigr| \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi trouvé un majorant indépendant de $x \in I$: en passant à la borne supérieure, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré que la suite de fonctions $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur I vers la fonction $\varphi \circ f$.

Solution 4

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

❧ Pour tout $x \in I$, on a $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, on en déduit que $\sum u_n(x)$ est aussi absolument convergente. Donc la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est bien définie pour tout $x \in I$.

❧ Soient $0 < x < y$. Il est clair que
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < u_n(y) < u_n(x).$$
En sommant ces encadrements pour $n \geqslant 1$, on en déduit que la somme S est une fonction décroissante et positive sur I :
$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 < S(y) < S(x).$$

✍ *On en déduit d'une part que S tend vers une limite positive finie au voisinage de $+\infty$ (fonction décroissante et minorée) ; d'autre part que S tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ au voisinage de 0 (fonction décroissante).*

❧ Il est clair que u_n est continue sur I pour tout $n \geqslant 1$.
Pour $a > 0$,
$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n + n^2 a}$$
(le majorant ne dépend pas de x) et comme
$$\frac{1}{n + n^2 a} = \mathcal{O}(1/n^2)$$
lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[a, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont toutes continues sur $[a, +\infty[$, on en déduit que la somme S est continue sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $x_0 > 0$, il existe $0 < a < x_0$, donc S est continue au point x_0. Cela prouve que S est continue en chaque point $x_0 \in I$, c'est-à-dire que S est continue sur I.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in I$, on pose
$$v_n(x) = x u_n(x) = \frac{x}{n + n^2 x}.$$
Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 1$,
$$0 \leqslant v_n(x) = \frac{1}{n^2 + n/x} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Ce majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ (ici : $\mathcal{V} = [1, +\infty[$).

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$v_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{n^2}.$$
Donc (théorème de dérivation terme à terme, **76.**) la somme $xS(x)$ tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et cette limite est égale à
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

✍ *Autrement dit, $S(x) \sim \frac{\pi^2}{6x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En particulier, la fonction S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.*

3. On calcule l'intégrale en décomposant en éléments simples :
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{x}{1 + tx}\, dt \\ &= \left[\ell n \frac{t}{1 + tx}\right]_1^{+\infty} \\ &= \ell n \frac{1}{x} - \ell n \frac{1}{1 + x}\end{aligned}$$
et en particulier
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x} &= -\ell n\, x + \ell n(1 + x) \\ &= -\ell n\, x + x + o(x) \\ &\sim -\ell n\, x\end{aligned}$$
lorsque x tend vers 0.

❧ Pour tout $x \in I$, la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t + t^2 x}$$

est clairement une fonction décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant u_n(x)$$

et en sommant ces encadrements pour $n \geqslant 1$, on en déduit que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

c'est-à-dire que

$$S(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant S(x).$$

En particulier,

$$S(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers 0.

Le développement asymptotique calculé plus haut donne enfin :

$$S(x) = -\ell n\, x + \mathcal{O}(1) \sim -\ell n\, x$$

lorsque x tend vers 0.

✍ *Le fait que la somme S tende vers une limite infinie au voisinage de 0 prouve que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas uniforme au voisinage de 0 (théorème de passage à la limite terme à terme).*

Solution 5

1. ❧ **Convergence simple**

Il est clair que $u_n(x) = \mathcal{O}(1/n^2)$ pour tout $x \in \Omega$, donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et la somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est donc bien définie sur Ω.

❧ **Monotonie**

Chaque fonction u_n est clairement croissante, donc

$$\forall\, -1 < x < y, \qquad u_n(x) \leqslant u_n(y)$$

et en sommant

$$\forall\, -1 < x < y, \qquad S(x) \leqslant S(y).$$

La fonction S est donc croissante sur Ω.

❧ **Continuité**

Quels que soient $-1 < a < 0 < b$, par monotonie de u_n, on a

$$\forall\, a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{b}{n(n+a)}.$$

Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$.

Comme chaque fonction u_n est continue, on en déduit que la somme S est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{-1<a<0<b} [a, b].$$

2. ❧ **Équation fonctionnelle**

Pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+(x+1)}\Big) - \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{(n+1)+x}\Big) && \text{(linéarité)} \\ &= \frac{1}{1+x}. && \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers -1, le second membre tend vers $+\infty$ et $S(x+1)$ tend vers $S(0) = 0$ (puisque S est continue sur $]-1, 1[$ (et donc en particulier continue au point $x = 0$). On a donc

$$S(x) = \frac{-1}{1+x} + S(x+1) \underset{x \to 0}{=} \frac{-1}{1+x} + o(1) \sim \frac{-1}{1+x}.$$

3. ❧ **Étude au voisinage de $+\infty$**

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\Big) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\Big).$$

✍ *Impossible de traiter cette question sans changer d'indice !*

Pour tout entier $N \geqslant n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\Big) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La dernière somme est constituée de n termes (où n est ici fixé) et chaque terme (positif) est inférieur à $1/N$, donc cette somme est bornée par n/N et tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad S(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

4. Pour tout $x > 0$ fixé, on pose

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}.$$

Il est clair que f est une fonction décroissante, positive, continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. Par comparaison d'une somme avec une intégrale (faire une FIGURE !),

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant S(x) \leqslant \frac{x}{1+x} + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Pour tout $A > 1$,

$$\int_1^A f(t)\,dt = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\,dt = \ln\Big(\frac{A}{1} \cdot \frac{1+x}{A+x}\Big)$$

donc en faisant tendre A vers $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \ln(1+x).$$

Comme $\frac{x}{1+x}$ reste bornée au voisinage de $+\infty$ (cette expression tend vers 1), on déduit de l'encadrement précédent que

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(1+x) \sim \ln x.$$

✍ *Cet exercice présente une application typique de la comparaison somme/intégrale.*

Solution 6

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\ell n(1+n^2x^2)}{n^3}.$$

❧ **Convergence simple**
Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc la somme est bien définie (et nulle).
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$u_n(x) = \frac{\ell n(n^2) + \ell n(x^2 + 1/n^2)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\,\ell n\, n}{n^3} = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et la somme $S(x)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

❧ **Classe $\mathscr{C}^1$**
Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_n'(x) = \frac{2n^2x}{n^3(1+n^2x^2)} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{nx}{1+(nx)^2}.$$
L'étude de $\big[t \mapsto \frac{t}{1+t^2}\big]$ montre que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Big|\frac{t}{1+t^2}\Big| \leqslant \frac{1}{2}$$
et donc que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|u_n'(x)\big| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Par conséquent, la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}.$$

❧ **Classe $\mathscr{C}^2$**
Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$,
$$u_n''(x) = \frac{2}{n} \cdot \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$
Pour tout $a > 0$, on en déduit que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \geqslant a, \quad \big|u_n''(x)\big| \leqslant \frac{2}{n} \cdot \frac{1+n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \leqslant \frac{2}{n(1+n^2a^2)}.$$
Le majorant est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente (puisque $a > 0$). On en déduit que la série $\sum u_n''$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc que la somme S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur
$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$
avec
$$\forall\, x > 0, \qquad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

✍ *Si on a l'audace de prendre $x = 0$ dans cette formule (qui n'a été établie que pour $x > 0$), on constate que la série diverge. Il est donc probable que S ne soit pas de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0.*

❧ Par symétrie (la somme S étant évidemment une fonction paire), la somme S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et l'expression précédente est vraie sur $\mathbb{R}^*$.

❧ **Étude au voisinage de 0**
L'expression
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$$
va nous permettre d'y voir plus clair dans le comportement de S au voisinage de l'origine.
Pour $x > 0$, on pose
$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{2x}{t(1+t^2x^2)}.$$

Il est clair que la fonction f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$. (Il est tout aussi clair qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de l'origine !)

La comparaison classique somme/intégrale nous donne alors

$$\forall\, x > 0, \qquad \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant S'(x) \leqslant \frac{2x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{2x}{t(1+t^2x^2)} = 2x \cdot \Big(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\Big)$$

on intègre ensuite sur $[1,A]$:

$$\int_1^A \frac{2x}{t(1+t^2x^2)}\,dt = 2x\Big[\ell n\,\frac{A}{\sqrt{1+x^2A^2}} + \frac{1}{2}\,\ell n(1+x^2)\Big]$$

et on fait enfin tendre A vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = -2x\,\ell n|x| + x\,\ell n(1+x^2).$$

Lorsque x tend vers 0, on a

$$\frac{2x}{1+x^2} \sim 2x, \quad x\,\ell n(1+x^2) \sim x^3 \quad \text{et} \quad x = o(2x\,\ell n|x|)$$

donc

$$S'(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x\,\ell n|x|.$$

Cette estimation confirme que $S'(x)$ tend vers $S'(0) = 0$ lorsque x tend vers 0 et que le graphe de S' admet une tangente verticale au point $x = 0$, ce qui prouve que S n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0.

Solution 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \Omega =]0,+\infty[$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

Chaque fonction u_n est continue sur Ω (fonction rationnelle de x, dont le dénominateur reste strictement positif sur Ω).

Pour tout $x \in \Omega$, la suite de terme général

$$\big|u_n(x)\big| = \frac{1}{1+nx}$$

tend vers 0 en décroissant. On peut alors déduire du Critère spécial des séries alternées que la série $\sum u_n(x)$ est convergente (la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur Ω) ainsi que la domination suivante du reste :

$$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x}. \tag{$\star$}$$

Pour tout $a > 0$, on pose

$$V_a = [a,+\infty[.$$

On déduit alors de $(\star)$ que

$$\forall\, x \in V_a,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|R_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, cela prouve donc que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur chaque intervalle V_a.

Par conséquent, la somme S de cette série est continue sur

$$\Omega = \bigcup_{a>0} V_a.$$

✍ *Nous allons maintenant appliquer deux fois le Théorème de passage à la limite terme à terme.*

❧ Lorsque x tend vers $+\infty$, il est clair que $u_0(x)$ tend vers 1 et que $u_n(x)$ tend vers 0 pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur V_1 (= un voisinage de $+\infty$), on en déduit que la somme S admet une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1.$$

❧ En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ (= un espace vectoriel de dimension finie) et tendent vers une limite finie au voisinage de 0 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to 0} u_n(x) = (-1)^n.$$

Comme la série $\sum(-1)^n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur Ω (par contraposée du Théorème de passage à la limite terme à terme).

✍ *Petit complément de programme : nous allons calculer un développement asymptotique de S au voisinage de $+\infty$. Intuitivement, on se doute que*

$$S(x) - 1 \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Pour en avoir le cœur net, on étudie la différence entre ces deux quantités :

$$S(x) - 1 - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{nx}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)}.$$

Comme la suite de terme général

$$\frac{1}{nx(1+nx)}$$

tend vers 0 en décroissant pour tout $x \in \Omega$, on peut appliquer à nouveau le Critère spécial des séries alternées :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)}\right| \leqslant \frac{1}{x(1+x)}$$

ce qui prouve en particulier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(1+nx)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On a ainsi démontré que

$$S(x) = 1 + \frac{K}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, où

$$K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Solution 8

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

❧ Pour $0 \leqslant x < 1$, on sait que x^n tend vers 0 et par conséquent $u_n(x) \sim x^n$, donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
Pour $x = 1$, on a $u_n(x) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$, donc la série $\sum u_n(1)$ diverge grossièrement.
Enfin, pour $x > 1$, on sait que x^n tend vers $+\infty$, donc

$$u_n(x) \sim \frac{x^n}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = (1/x)^n$$

et comme $0 < {}^1\!/_x < 1$, on en déduit que $\sum u_n(x)$ converge absolument.

L'ensemble de définition de la somme S est donc

$$\mathscr{D}_f = [0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[.$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathscr{D}_f$, il est clair que ${}^1\!/_x \in \mathscr{D}_f$ et que

$$u_n({}^1\!/_x) = \frac{({}^1\!/_x)^n}{1 + ({}^1\!/_x)^{2n}} = \frac{x^n}{x^{2n}+1} = u_n(x).$$

Par conséquent, $S({}^1\!/_x) = S(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ et il suffit donc d'étudier les variations de S sur $I = [0, 1[$.

3. Soit $0 < a < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0, a]$, il est clair que

$$0 \leqslant x^n \leqslant a^n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant 1 + x^{2n}$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0, a],\ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant a^n.$$

On a obtenu un majorant **indépendant de** $x \in [0, a]$ et comme $0 < a < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la somme S est continue sur $[0, a]$ pour tout $0 < a < 1$ et donc qu'elle est continue sur

$$[0, 1[= \bigcup_{0<a<1} [0, a].$$

La fonction S est aussi continue sur $]1, +\infty[$, comme composée de fonctions continues.

$$\begin{array}{ccccc}]1, +\infty[& \longrightarrow &]0, 1[& \xrightarrow{S} & \mathbb{R} \\ x & & {}^1\!/_x & & S({}^1\!/_x) = S(x) \end{array}$$

Finalement, la fonction S est continue sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f = [0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$.

✍ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n tend vers $\ell_n = {}^1\!/_2$ au voisinage de 1. Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $[0, 1[$, alors en particulier la série $\sum \ell_n$ convergerait (Théorème de passage à la limite terme à terme), ce qui est faux, puisque la série $\sum \ell_n$ est grossièrement divergente.*

Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ (ni, a fortiori, *normalement sur $[0, 1[$).*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leqslant x < 1$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - x^{2n})}{(1 + x^{2n})^2} > 0.$$

Soit $0 < a < 1$. On peut encadrer $u_n'(x)$ comme on a encadré $u_n(x)$ précédemment :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0, a], \quad 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{n \times a^{n-1} \times 1}{1 + 0} = na^{n-1}.$$

On a à nouveau obtenu un majorant indépendant de $x \in [0, a]$. Comme $0 < a < 1$, la série $\sum na^{n-1}$ est convergente (série entière dont le rayon de convergence est égal à 1), donc la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[0, a] \subset [0, 1[$.

Nous étudions donc une série $\sum u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; qui converge simplement sur $[0, 1[$; dont la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[0, a] \subset [0, 1[$. Par conséquent, la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$[0, 1[= \bigcup_{0<a<1} [0, a]$$

et, pour tout $0 \leqslant x < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) > 0.$$

En particulier, la somme S est strictement croissante sur $[0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ (comme composée de fonctions strictement monotones, de monotonies opposées).

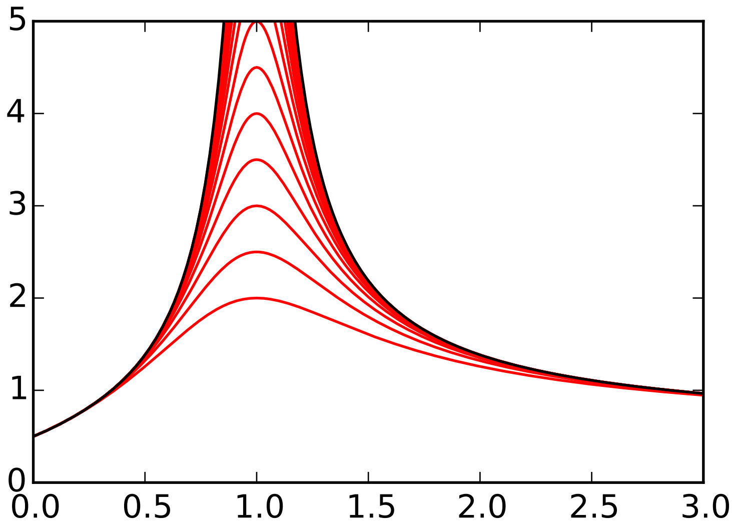
❧ Comme les u_k sont des fonctions positives,

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad S(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Comme la fonction S est croissante sur $[0, 1[$, elle tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ au voisinage gauche de 1. Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ell \geqslant \lim_{x \to 1^-} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(1) = \frac{n}{2}.$$

Par conséquent, $\ell = +\infty$, donc le graphe de S présente une asymptote verticale en $x = 1$.



Graphe de S et des premières sommes partielles

✍ *Comme la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément au voisinage de 1, on ne peut pas utiliser les théorèmes vus en cours pour étudier le comportement de S au voisinage de 1, il faut procéder comme on l'a fait (en minorant les sommes partielles).*

Solution 9

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}.$$

Il est clair que chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et positive sur $\mathbb{R}$,

❧ Pour $x \leqslant 0$, le terme e^{nx} est borné, donc (lorsque n tend vers $+\infty$)

$$u_n(x) = \frac{\ln[n + \mathcal{O}(1)]}{n^3} = \frac{\ln n + o(1)}{n^3} \sim \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Pour $x > 0$, au contraire, $e^{nx} = (e^x)^n$ tend vers $+\infty$ et $n = o(e^{nx})$, donc

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln[1 + o(1)]}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \sim \frac{x}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Bref : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et l'ensemble de définition de S est égal à $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est évidemment croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall\, x \in\,]-\infty, a]\,, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$$

et, comme on vient de le voir, $u_n(a) = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On a bien trouvé un majorant indépendant de x et ce majorant est bien le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur chaque intervalle $]-\infty, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est continue sur chaque intervalle $]-\infty, a]$ et donc qu'elle est continue sur

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}}]-\infty, a] =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

✍ *Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ car :*

$$u_n(x) = \frac{\ln(e^{nx}) + \ln(1 + ne^{-nx})}{n^3} = \frac{nx + o(1)}{n^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

Comme les fonctions u_n ne sont pas bornées, la série de fonctions $\sum u_n$ ne saurait être normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme les fonctions u_n sont positives,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant u_{n+1}(x)$$

donc le reste R_n n'est pas borné non plus sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle et la série de fonctions $\sum u_n$ n'est pas non plus uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n'(x) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{n + e^{nx}}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a donc une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ et dont la série dérivée converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

On déduit de l'encadrement de $u_n'(x)$ que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 < S'(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la fonction S est strictement croissante et $\pi^2/6$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers $\ln n/n^3$ au voisinage de $-\infty$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $-\infty$, on en déduit que la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $-\infty$ et que

$$\lim_{x\to-\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to-\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}.$$

❧ Comme

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

on conjecture que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\pi^2/6)x$. Pour en avoir le cœur net, on pose

$$S(x) - \frac{\pi^2}{6} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx}) - nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \quad \text{où} \quad v_n(x) = \frac{\ln(1 + ne^{-nx})}{n^3}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction v_n est positive et décroissante, donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant v_n(1)$$

et comme ne^{-n} tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_n(1) = \ell n(1 + ne^{-n}) \sim ne^{-n} = n(e^{-1})n$$

donc la série $\sum v_n(1)$ est convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$ et, comme cet intervalle est un voisinage de $+\infty$,

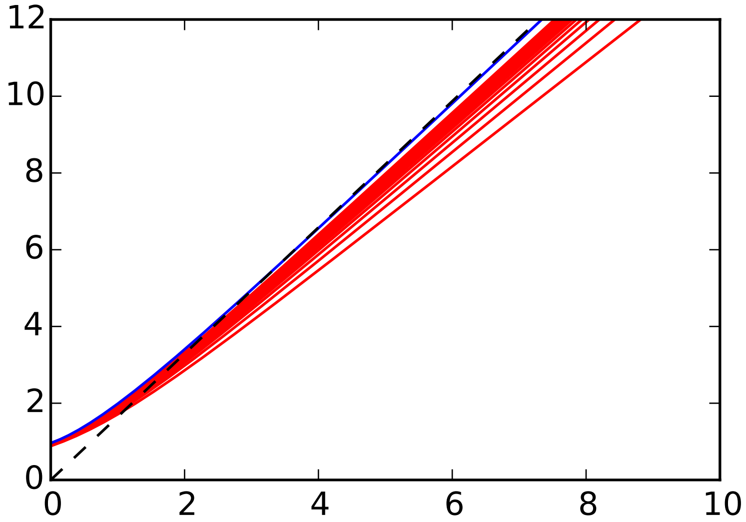
$$\lim_{x \to +\infty} S(x) - \frac{\pi^2}{6} \cdot x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} v_n(x) = 0.$$

Autrement dit, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot x + o(1)$$

et donc, comme on en avait eu l'intuition,

$$S(x) \sim \frac{\pi^2}{6} \cdot x.$$



Graphe de S avec les premières sommes partielles et l'asymptote oblique

Solution 10

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}.$$

❧ Si $x \leqslant 0$, la suite de terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Mais si $x > 0$, alors

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad n^p u_n(x) = \exp(\underbrace{-x\sqrt{n} + p\,\ell n\, n}_{\longrightarrow -\infty}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc (pour $p = 2$) $u_n(x) = o(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

L'ensemble de définition de S est donc égal à $]0, +\infty[$.

2. Pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\forall\, x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = (-\sqrt{n})^k \cdot u_n(x)$$

donc, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $a > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant (\sqrt{n})^k \cdot u_n(a).$$

On a obtenu un majorant indépendant de x et, d'après l'ordre de grandeur calculé à la question précédente (avec cette fois $p = 2 + k/2$),

$$(\sqrt{n})^k \cdot u_n(a) \underset{n \to +\infty}{=} o(1/n^2),$$

donc la série des majorants est convergente.

La série de fonctions $\sum u_n$ est donc une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur $]0, +\infty[$ et dont les séries dérivées convergent normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$ quel que soit $a > 0$. Par conséquent, la somme S de cette série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\forall\, x > 0, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x).$$

✍ *En particulier,*

$$\forall\, x > 0, \quad S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-\sqrt{n}\, x} < 0$$

donc la somme S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. On a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur un voisinage de $+\infty$ et il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n tend vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$:

$$\ell_0 = 1, \qquad \forall\, n \geqslant 1, \quad \ell_n = 0$$

donc la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

4. Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, on pose

$$f(x, t) = \exp(-\sqrt{t}\, x)$$

de telle sorte que $u_n(x) = f(x, n)$. Pour tout $x > 0$, la fonction

$$[t \mapsto f(x, t)]$$

est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme la série $\sum u_n(x)$ est convergente, on en déduit que $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x, n) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x, t)\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(x, n) = S(x).$$

Effectuons le changement de variable $v = x \cdot \sqrt{t}$: la fonction $\varphi = \left[v \mapsto t = {}^{v^2}\!/_{x^2}\right]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et comme $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, la fonction

$$\left[v \mapsto f\big(x, \varphi(v)\big) \cdot \varphi'(v) = f\Big(x, \frac{v^2}{x^2}\Big) \cdot \frac{2v}{x^2} = \frac{2}{x^2} \cdot v e^{-v}\right]$$

est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$ (ce qui n'est pas une grande nouvelle !) et

$$\int_0^{+\infty} f(x, t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-v} \cdot \frac{2v\, dv}{x^2} = \frac{2\Gamma(2)}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement de $S(x)$ nous dit alors que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2} + 1$$

et donc que

$$S(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x^2} + \mathcal{O}(1) \sim \frac{2}{x^2}.$$

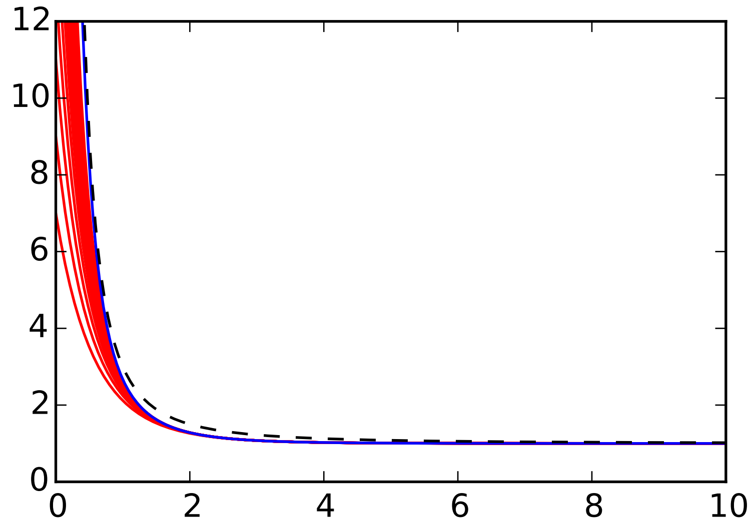
✍ *Comme $S(x)$ est une somme de termes* positifs, *on déduit aussi de ce qui précède que*

$$\forall\, x > 0, \quad 1 = u_0(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}$$

et donc que

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui nous donne à nouveau la limite de S *au voisinage de* $+\infty$*, mais avec en prime une estimation de la différence entre* $S(x)$ *et sa limite.*



Le graphe de S*, des premières sommes partielles et de* $[x \mapsto 1 + {}^{2}/_{x^2}]$

Solution 11

La convergence uniforme implique la convergence simple, donc la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

est bien définie pour tout $x \in]a, b[$.

❧ Les fonctions u_n sont toutes continues sur $]a, b[$ et la convergence uniforme conserve la continuité, donc la somme S est une application continue sur $]a, b[$.

❧ Les fonctions u_k sont intégrables sur $]a, b[$, donc les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

sont intégrables sur $]a, b[$.

Traduisons la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1$: il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \|S - S_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in]a, b[, \quad \left|S(x)\right| &\leqslant \left|S_{N_0}(x)\right| + \left|S(x) - S_{N_0}(x)\right| \\ &\leqslant \left|S_{N_0}(x)\right| + 1. \end{aligned}$$

Or la fonction S_{N_0} est, comme l'a dit, intégrable sur $]a, b[$ et la fonction constante $[x \mapsto 1]$ est intégrable puisque $]a, b[$ est un intervalle BORNÉ. D'après le Théorème de comparaison, la fonction S est intégrable sur $]a, b[$.

❧ Nous pouvons donc nous intéresser à

$$\int_a^b S_n(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx \right| &\leqslant \int_a^b \left|S(x) - S_n(x)\right| dx \\ &\leqslant (b-a)\|S - S_n\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le Théorème d'encadrement, cela prouve que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx.$$

On a donc démontré que la série $\sum \int_a^b u_n(x)\,dx$ était convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx.$$

Solution 12

1. Les deux définitions de $f_n(1/n)$ coïncident :

$$n\sqrt{n}\,\frac{1}{n} = \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1/n}}$$

donc la fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.

❧ La fonction f_n est clairement continue sur $[0, 1/n[$, ainsi que sur $]1/n, 1]$. De plus, elle est clairement continue à gauche en $x = 1/n$ et continue à droite en $x = 1/n$, donc elle est bien continue en $x = 1/n$. Par conséquent, la fonction f_n est continue sur le segment $[0,1]$.

L'intégrale I_n existe donc bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

✍ *La fonction f_n est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $[0, 1/n[$ et $]1/n, 1]$. Elle est également dérivable à gauche et à droite en $x = 1/n$, mais*

$$(f_n)'_g(1/n) = n\sqrt{n} \quad \textit{tandis que} \quad (f_n)'_d(1/n) = \left.\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right|_{x=1/n} = \frac{-n\sqrt{n}}{2},$$

donc f_n n'est pas dérivable en $x = 1/n$.

❧ Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
Si $0 < x \leqslant 1$, alors il existe un entier $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad x \geqslant \frac{1}{n_0} \geqslant \frac{1}{n}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

✍ *La fonction f est continue sur $]0,1]$, mais elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, car elle n'a pas de limite à droite finie au voisinage de 0 (elle tend vers $+\infty$).*

❧ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, la limite f de cette suite serait également continue sur $[0,1]$, ce qui est faux comme on vient de le constater.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. On peut calculer explicitement I_n : pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = n\sqrt{n}\,\frac{(1/n)^2}{2} + 2\big(\sqrt{1} - \sqrt{1/n}\big) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

❧ Sinon, on peut remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1/n) = \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

et que
$$\forall\,\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant f_n(x)=f(x).$$
Par conséquent,
$$\forall\,n\geqslant 1,\ \forall\,x\in[0,1],\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant f(x).$$
Or la fonction f est une fonction intégrable de référence sur $]0,1]$, donc la convergence est dominée !

Par conséquent,
$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = 2\big[\sqrt{1}-\sqrt{0}\big]=2.$$

✍ *La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ et a* fortiori *n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Cependant, elle est bien continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$: c'est même, comme on l'a dit, une fonction de référence !*

Cette remarque en passant pour indiquer que la théorie de l'intégration qui est au programme est trop simplifiée pour ne pas présenter quelques bizarreries...

Solution 13

Soit $x\in\,]-1,1[$. Une récurrence immédiate démontre que
$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad f(x)=f(q^{n+1}x)\prod_{k=0}^{n}\frac{1+q^kx}{1-q^kx}.$$
Comme $|q|<1$, la suite de terme général $q^{n+1}x$ tend vers 0 et, par continuité de f, la suite de terme général $f(q^{n+1}x)$ tend vers $f(0)=1$.

Il existe donc <u>au plus une</u> fonction qui répond au problème posé, elle est définie par
$$\forall\,x\in\,]-1,1[,\quad f(x)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1+q^kx}{1-q^kx}.$$

❧ Comme $|x|<1$ et $|q|<1$, alors $|q^kx|<1$ pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ et par conséquent,
$$0<1\pm q^kx.$$
Il s'agit donc d'étudier les séries de fonctions
$$\sum \ell n(1+q^kx)\quad\text{et}\quad \sum \ell n(1-q^kx).$$

❧ Comme q^kx tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$,
$$\ell n(1\pm q^kx)\sim x\cdot q^k$$
et comme $|q|<1$, la série géométrique $\sum q^k$ est absolument convergente. Par comparaison, les deux séries $\sum \ell n(1\pm q^kx)$ sont absolument convergentes pour tout $x\in\,]-1,1[$.

❧ Soit $0<a<1$. La fonction $\varphi=[t\mapsto \ell n(1+t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[-a,a]$ et
$$\forall\,t\in[-a,a],\quad \varphi'(t)=\frac{1}{1+t}\in\left[\frac{1}{1+a},\frac{1}{1-a}\right].$$
Par conséquent,
$$\forall\,t\in[-a,a],\quad \big|\varphi'(t)\big|\leqslant\frac{1}{1-a}$$
et on déduit de l'inégalité des accroissements finis que
$$\forall\,t\in[-a,a],\quad \big|\varphi(t)-\varphi(0)\big|\leqslant\frac{1}{1-a}\cdot|t-0|$$
c'est-à-dire
$$\forall\,t\in[-a,a],\quad \big|\ell n(1+t)\big|\leqslant\frac{|t|}{1-a}.$$

❧ Par conséquent, pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \ell n(1 \pm q^k x) \right| \leqslant \frac{a}{1-a} \cdot |q|^k.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [-a, a]$ et c'est le terme général d'une série (géométrique) convergente. Donc les séries de fonctions $\sum \ell n(1 \pm q^k x)$ convergent normalement sur chaque segment $[-a, a]$.

On sait que la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues est elle aussi continue. En conséquence, les sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1 \pm q^k x)$$

sont des fonctions continues de x sur chaque segment $[-a, a]$ et donc, la continuité étant une propriété locale, des fonctions continues sur $]-1, 1[$ (intervalle qui est l'union de ces segments).

❧ Par continuité de la fonction exp, l'expression

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1+q^k x}{1-q^k x} = \exp\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1+q^k x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1-q^k x)\Big)$$

est une fonction continue de x sur $]-1, 1[$ et il est clair que cette expression est égale à 1 pour $x = 0$.

Par ailleurs, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1-x} f(qx) &= \frac{1+x}{1-x} \exp\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1+q^k[qx]) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1-q^k[qx])\Big) \\
&= \frac{1+x}{1-x} \exp\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \ell n(1+q^k x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \ell n(1-q^k x)\Big) \\
&= \exp\Big(\ell n(1+x) - \ell n(1-x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \ell n(1+q^k x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \ell n(1-q^k x)\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1+q^k x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ell n(1-q^k x)\Big) = f(x).
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que la seule fonction possible était bien définie et possédait de plus toutes les propriétés souhaitées.

Solution 14

1. Posons $I =]0, +\infty[$. Pour tout $t \in I$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t, x) = \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}.$$

Il est clair que $\varphi_x = [t \mapsto \varphi(t, x)]$ est continue sur I (quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$).

Lorsque t tend vers 0,

$$\varphi(t, x) \sim \frac{t \times 1}{t} = 1$$

donc φ_x est bien intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t, x) &\sim te^{-t(x+1)} \\
&= te^{-t(x+1)/2} \cdot e^{-t(x+1)/2} = o(e^{-t(x+1)/2}).
\end{aligned}$$

Pour $x > -1$, on a $x + 1 > 0$ et φ_x est donc intégrable au voisinage de $+\infty$. En revanche, pour $x \leqslant -1$, on a $x + 1 \leqslant 0$, donc φ_x tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent,

— si $x > -1$, alors la fonction φ_x est intégrable sur I, donc l'intégrale généralisée $f(x)$ est convergente ;

— si $x \leqslant -1$, alors la fonction φ_x n'est pas intégrable sur I et, pire encore, l'intégrale généralisée $f(x)$ est divergente.

✍ *Question classique mais qui demande d'être vigilant au moment de conclure. Comme on sait, il arrive qu'une intégrale généralisée soit convergente même lorsque la fonction intégrande n'est pas intégrable.*

La question posée ici est de savoir si l'intégrale généralisée $f(x)$ est convergente, il ne suffit pas de savoir pour quels x la fonction φ_x est intégrable sur I !

2. Pour tout $t \in I$, le produit $-tx$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x) = 0.$$

Par ailleurs, la fonction exp étant croissante,

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{te^{-tx}}{e^t-1} \leqslant \frac{t}{e^t-1} = \varphi(t,0).$$

On a un majorant indépendant de x et intégrable sur I, cette majoration est vraie sur l'intervalle $[0,+\infty[$, donc sur un voisinage de $+\infty$. On peut donc déduire du Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \varphi(t,x)\,dt = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0.$$

3. Considérons $x > 0$, de telle sorte que $x > -1$ et $x-1 > -1$. Les fonctions φ_x et φ_{x-1} sont donc intégrables sur I et, par linéarité de l'intégrale,

$$f(x-1) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\big(e^{-t(x-1)} - e^{-tx}\big)\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dt.$$

Comme $x > 0$, on peut poser $u = xt$ et obtenir

$$f(x-1) - f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = \frac{1}{x^2}\cdot\Gamma(2) = \frac{1}{x^2}.$$

❧ On en déduit que, pour tout $x > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - f(x+n+1) = \sum_{k=0}^{n}\big[f(x+k) - f(x+k+1)\big] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k+1)^2}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x > -1, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x+n+1) = 0$$

et comme la série $\sum \frac{1}{(x+k+1)^2}$ converge (le terme général est équivalent à $1/k^2$), on peut passer à la limite et obtenir ainsi :

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

4. On peut aussi transformer un peu l'intégrande pour faire apparaître une série géométrique.

$$\begin{aligned}\forall\, x > -1,\ \forall\, t > 0, \quad \varphi(t,x) = \frac{te^{-(x+1)t}}{1-e^{-t}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(x+1)t}(e^{-t})^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} te^{-(x+k)t}.\end{aligned}$$

Nous allons donc considérer la série de fonctions $\sum u_k$ définies par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in I, \quad u_n(t) = te^{-(x+k)t}.$$

✍ *Le paramètre x est fixé une fois pour toutes, il n'apparaît donc pas dans les notations utilisées ici. (Ce n'est pas très bien, mais ça simplifie la vie.)*

Chaque fonction u_k est intégrable sur I car $x+k > (-1)+1 = 0$ (cf plus haut pour les détails) et positive, donc

$$\int_0^{+\infty} \big|u_k(t)\big|\,dt = \int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \frac{1}{(x+k)^2}$$

avec le changement de variable $v = (x+k)t$.

La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I et sa somme est la fonction $[t \mapsto \varphi(t,x)]$, qui est bien continue sur I.

✍ *Ce qui suit est évident — puisqu'en fait on est parti de $\varphi(t,x)$ et qu'on l'a développée en série de fonctions ! Néanmoins, cette vérification est nécessaire pour justifier l'application du Théorème de dérivation terme à terme.*

Enfin, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |u_k(t)| \, dt$$

est convergente (le terme général vient d'être calculé). On peut donc intégrer terme à terme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t) \, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

✍ *La fonction f est aussi développable en série entière sur $]-1,1[$ et la méthode est classique (Théorème de Fubini).*
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(1+x/k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{[1-(-x/k)]^2}.$$

On a donc $|{-x}/k| < 1$ et on sait que

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{1-t}\Big) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n$$

donc

$$\frac{1}{(x+k)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\Big(\frac{-x}{k}\Big)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{k^{n+2}} \cdot x^n$$

et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} \quad \textit{avec} \quad a_{k,n} = \frac{(-1)^n(n+1)}{k^{n+2}} \cdot x^n.$$

Sur l'intervalle ouvert de convergence, une série entière est absolument convergente, donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(a_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et, d'après les calculs précédents,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_k \overset{\textit{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{k,n}| = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\Big(\frac{|x|}{k}\Big)^n = \frac{1}{(k-|x|)^2}.$$

La série $\sum \sigma_k$ est absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann). D'après le Théorème de Fubini, la famille $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est donc une famille sommable et, en particulier,

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{k^{n+2}}\Big) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(n+1)\zeta(n+2) \cdot x^n. \end{aligned}$$

Solution 15

1. Pour tout $k \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_k(x) = \frac{xe^{-kx}}{\ell n\, k}.$$

Il est clair que les fonctions u_k sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

❧ Pour $x = 0$, on a $u_k(x) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ et la série $\sum u_k(x)$ converge évidemment.
Pour $x > 0$, on a

$$u_k(x) = \frac{x}{\ell n\, k} \cdot e^{-kx} \underset{k \to +\infty}{=} o\big((e^{-x})^n\big)$$

et comme $0 < e^{-x} < 1$, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum u_k(x)$ converge absolument.
La série de fonctions $\sum u_k$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ au moins. Comme la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x < 0$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ et seulement sur $\mathbb{R}_+$.*

❧ Chaque fonction u_k est positive et comme

$$\forall\, x > 0, \quad u_k'(x) = \frac{e^{-kx}}{\ln k}\,(1 - kx),$$

on en déduit que

$$\|u_k\|_\infty = u_k(1/k) = \frac{1}{e\,k\ln k}.$$

Comme la série $\sum \|u_k\|_\infty$ diverge, la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Les séries de Bertrand n'étant pas au programme, pour justifier la divergence de la série $\sum \frac{1}{k\ln k}$, il faut prétendre qu'on a pris soin de comparer les sommes partielles de cette série aux intégrales*

$$\int_2^n \frac{dt}{t\ln t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\ln n.$$

De cette manière, les apparences sont sauves...

2. Comme les $u_k(x)$ sont positifs,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\Big| &\leqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{+\infty} xe^{-kx}\\ &\leqslant \frac{1}{\ln n}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}.\end{aligned}$$

La fonction

$$\varphi = \left[x \mapsto \frac{x}{1-e^{-x}}\right]$$

est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 1 au voisinage de 0. Elle admet donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$ et comme toute fonction continue sur un segment est bornée, quel que soit $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall\, x \in\,]0, A]\,, \quad 0 \leqslant \frac{x}{1-e^{-x}} \leqslant M.$$

Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on en déduit que

$$\forall\, x \in [0, A], \quad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln k}\Big| \leqslant \frac{M}{\ln n}.$$

Cet encadrement prouve que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, A]$.
3. Comme les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et que A est quelconque, on en déduit que la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (= l'union des segments $[0, A]$ lorsque A parcourt $\mathbb{R}_+^*$).
❧ Fixons maintenant $\alpha > 0$.
► Si l'entier k est assez grand pour que $k\alpha > 1$, on déduit de l'étude des variations de u_k que

$$\forall\, x \geqslant \alpha, \quad 0 \leqslant u_k(x) \leqslant u_k(\alpha).$$

Le majorant est indépendant de $x \in [\alpha, +\infty[$ et la série $\sum u_k(\alpha)$ est convergente, donc la série $\sum u_k$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

✍ *Pour l'instant, cette étude ne nous apprend rien de nouveau. Patience...*

► Par inégalité triangulaire, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\forall\, x > 0, \quad |u_k'(x)| \leqslant \frac{e^{-kx}}{\ln k} + ku_k(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout k assez grand,

$$\forall\, x \geqslant \alpha, \quad \left|u_k'(x)\right| \leqslant (e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha).$$

Le majorant ne dépend pas de x et

$$(e^{-\alpha})^k + k u_k(\alpha) \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{o}(k e^{-k\alpha}).$$

Comme la série $\sum k(e^{-\alpha})^k$ converge absolument pour $\alpha > 0$ (puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum kx^k$ est égal à 1 et que $0 < e^{-\alpha} < 1$). Donc la série des dérivées $\sum u_k'$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$.

D'après le Théorème de dérivation terme à terme, la somme f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{\alpha>0} [\alpha, +\infty[$$

et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k'(x).$$

4. Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ell n\, n} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k}.$$

❧ Comme $\ell n\, k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{o}(k)$, la série $\sum \frac{1}{\ell n\, k}$ est divergente par comparaison à la série harmonique (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif).

Soit $A > 0$. Puisque la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ell n\, k}$ est divergente, il existe $n_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ell n\, k} \geqslant 2A.$$

Comme

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k} = \sum_{k=2}^{n_A} \frac{1}{\ell n\, k} \geqslant 2A$$

et que $0 < A < 2A$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \sum_{k=2}^{n_A} \frac{e^{-kx}}{\ell n\, k} \geqslant A.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \frac{f(x)}{x} \geqslant A.$$

Comme A est arbitrairement grand, on en déduit que $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

✍ *On a démontré que le taux d'accroissement $[f(x) - f(0)]/(x - 0)$ tendait vers $+\infty$ et donc que le graphe de f admettait une tangente verticale (vers le haut !) à l'origine.*