Intégrales

Exercice 1

1. Si la fonction f est paire ou impaire, alors elle est intégrable au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de $+\infty$.

2. Si f est paire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3. Si f est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{1+t^2+t^4} = 0$$

Exercice 2

1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,dt = 0$$

2.

$$\forall\, a>0,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ell n\, a}{a}.$$

Exercice 3

1. Pour $a<b$,

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi.$$

2. Pour tous $a<b$,

$$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

Exercice 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Exercice 5

Pour toute fonction f continue sur $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} f(\cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt.$$

Exercice 6

Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ell n\, t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \ell n\, 2$$

en posant $t=e^{-x}$.

Exercice 7

Lorsque a tend vers $+\infty$,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\pi}{a}.$$

Exercice 8

1. Pour tout $n \geqslant 2$, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big).$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x>0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 9

1. L'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$$

est définie pour tout $x>0$.

2. Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

3. Au voisinage de 0,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

donc $f(x) \sim -\ell n\, x$.

Exercice 10

Lorsque x tend vers 0,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \sim \frac{1}{x}.$$

Exercice 11

1. Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Alors $F(x) = o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$ et $F(x) \sim -\ell n\, x$ au voisinage de 0.

2. La fonction F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$

en intégrant par parties.

3. Au voisinage de $+\infty$,

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big).$$

4. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+x}\,dt.$$

Alors $\varphi(x) = e^{x^2}F(x^2)$, donc $\varphi(x) \sim -2e^{x^2}\,\ell n\, x$ au voisinage de 0 et

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12

Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \sim \frac{\pi}{2}\,\ell n\, x.$$

Exercice 13

Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Exercice 14

Si f est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exercice 15

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t/n}{t+t^3}\,dt \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Exercice 16

Par convexité de la fonction exp,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Exercice 17

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-kt}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 18

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

Exercice 19

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\,dt = \ell n\,\frac{1}{2}$$

Exercice 20

1. La fonction F définie par

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,dt$$

est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

2. Comme

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du,$$

la fonction F est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad 2xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

3. De plus $F(x) \sim 1/x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $F(x) \sim -2\,\ell n\, x$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,dt.$$

1. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Effectuer le changement de variable $u = t^2$.
3. Au moyen d'un changement de variable affine, éliminer l'entier n des bornes de l'intégrale.
4. En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 22

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes.

1.

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$$

2.

$$\int_0^{+\infty} (t+2) - \sqrt{t^2+4t+1}\,dt$$

Exercice 23

1. Démontrer la convergence de
$$I=\int_0^1 \frac{t-1}{\ell n\, t}\,dt.$$
2. Vérifier que
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 24

Justifier la convergence de l'intégrale
$$I=\int_0^1\frac{\ell n(1-x^2)}{x^2}\,dx$$
et calculer sa valeur au moyen d'une intégration par parties.

Exercice 25

Justifier l'existence de
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$$
et étudier le comportement de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 26

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ en posant :
$$\forall\, t\in[0,1],\quad f_n(t)=\left|\begin{array}{ll} n\sqrt{n}\,t & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant {}^1\!/_n,\\ {}^1\!/_{\sqrt{t}} & \text{pour } {}^1\!/_n\leqslant t\leqslant 1.\end{array}\right.$$
1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$, mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer de deux manières différentes la limite de
$$I_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$$
lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27

On considère deux suites réelles bornées $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose qu'il existe un segment $[c,d]$ (avec $c<d$) tel que
$$\forall\, t\in[c,d],\quad \lim_{n\to+\infty} a_n\cos nt+b_n\sin nt=0.$$
1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un réel φ_n tel que
$$\forall\, t\in[c,d],\quad a_n\cos nt+b_n\sin nt=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nt+\varphi_n).$$
2. Calculer
$$I_n=\int_c^d\big[a_n\cos nt+b_n\sin nt\big]^2\,dt$$
et en déduire que
$$I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{2}.$$
3. Démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 28 — 132 – 610

Soit A, une partie de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie par
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!}$$
et on suppose que
$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^x}{x^2}.$$
1. Soit I, une partie finie de A. Calculer
$$\sum_{n\in I}\int_0^{+\infty}\frac{x^ne^{-x}}{n!}\,dx$$
et en déduire que A est une partie finie.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 29 — 132 – 617

Soit f, une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

Exercice 30 — 132 – 628

Soit $a>0$. On considère une fonction g, continue sur $[0,a]$ et telle que $g(0)\neq 0$, et la fonction F définie par
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^a g(t)e^{-xt}\,dt.$$
Démontrer que
$$F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{g(0)}{x}.$$

Exercice 31 — 132 – 1166

Démontrer l'existence de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} 1-t\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{t}\,dt$$
puis calculer sa valeur.

Exercice 32 — 132 – 1167

On pose
$$I=\int_0^{\pi/2}\ell n\sin x\,dx\quad\text{et}\quad J=\int_0^{\pi/2}\ell n\cos x\,dx.$$
1. Justifier l'existence des intégrales I et J.
2. Vérifier que $I=J$.
3. Calculer $I+J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 33 132 – 1219

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt, \qquad u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum v_n$ converge.
On notera dans la suite :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2. Démontrer que l'intégrale I_n est bien définie. Calculer

$$\int_0^x ue^{-u}\,du$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n.$$

En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que la série $\sum u_k$ converge. En posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

démontrer que $T_n \sim {}^{R_n}/_{\sqrt{e}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 34 132 – 1225

On rappelle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\,dt = n!$$

(étude de la fonction Γ) et que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n.$$

1. Étudier les variations de $S(x) = (1+x)e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \geqslant 1, \quad S(x)^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt = 0.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, x \geqslant -1, \quad \ell n(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

5. En effectuant le changement de variable $u = (t-n)/\sqrt{n}$ dans l'intégrale I_n, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du = \sqrt{2\pi}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

INTÉGRALES (SOLUTIONS)

Solution 1

On considère le changement de variable *affine* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = -t.$$

❧ Soient f, une fonction continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et I, un intervalle contenu dans $\mathbb{R}$. Par définition, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $|f|$ est intégrable sur I.

— Si f est *paire*, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|f(-t)\big| = \big|f(t)\big|.$$

— Si f est *impaire*, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|f(-t)\big| = \big|-f(t)\big| = \big|f(t)\big|.$$

Dans les deux cas, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)$ est intégrable sur I.

❧ D'après le théorème de changement de variable affine, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $I =]a, b[$ si, et seulement si, la fonction

$$g = f \circ \varphi$$

est intégrable sur l'intervalle $J =]-b, -a[$.

1. Supposons que f soit intégrable au voisinage de $+\infty$: par définition, il existe un réel A tel que f soit intégrable sur $J =]A, +\infty[$.

Que la fonction f soit paire ou impaire, la fonction $f \circ \varphi$ est alors intégrable sur $J =]A, +\infty[$, donc la fonction f est intégrable sur $J =]-\infty, -A[$ et donc intégrable au voisinage de $-\infty$.

❧ Réciproquement, si f est intégrable au voisinage de $-\infty$, alors il existe un réel B tel que f soit intégrable sur $J =]-\infty, B[$.

Que f soit paire ou impaire, la fonction $f \circ \varphi$ est alors intégrable sur $J =]-\infty, B[$, donc la fonction f est intégrable sur $I =]-B, +\infty[$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *Comme les deux parties de cette démonstration sont très similaires, on peut se dispenser de rédiger complètement la deuxième partie (cependant, dans ce cas, il faut mentionner l'analogie).*

✍ *Comme d'habitude, pour démontrer qu'une fonction est intégrable, on ne manipule* ***aucune*** *intégrale,* seulement des fonctions positives ! *(De manière analogue, pour prouver qu'une série est absolument convergente, on n'étudie que son terme général, on ne calcule aucune somme partielle et encore moins de somme.)*

2. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors elle est intégrable sur les sous-intervalles $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Le changement de variable affine φ réalise une bijection de $J =]-\infty, 0]$ sur $I = [0, +\infty[$ et, si f est paire, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0} f(-t)\,dt && \text{(parité de } f\text{)}\\
&= -\int_{-\infty}^{0} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt && (\varphi'(t) \equiv -1)\\
&= -\int_{+\infty}^{0} f(u)\,du && (u = \varphi(t))\\
&= \int_{0}^{+\infty} f(u)\,du.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3. De même, si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire, alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{0} f(-t)\,dt && \text{(imparité de f)}\\ &= \int_{-\infty}^{0} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt && (\varphi'(t)\equiv -1)\\ &= \int_{+\infty}^{0} f(u)\,du && (u=\varphi(t))\\ &= -\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

4. La fonction définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2+t^4}$$

est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie et *continue* sur $]-\infty, +\infty[$.

Le numérateur est impair, le dénominateur est pair, donc le quotient f est une fonction *impaire*.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) \sim \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$$

donc la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$. D'après [**1**], la fonction f est aussi intégrable au voisinage de $-\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après [**3**],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$$

Solution 2

1. La fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$f(u) = \frac{\ell n\, u}{1+u^2}$$

est une fonction continue sur I. Elle est intégrable au voisinage de 0, puisque $f(u) \sim \ell n\, u$. Elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque

$$f(u) = \underbrace{\frac{\ell n\, u}{\sqrt{u}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{u}}{1+u^2}}_{\sim 1/u\sqrt{u}} = o\Big(\frac{1}{u\sqrt{u}}\Big).$$

Le changement de variable φ défini par

$$\forall\, t \in I, \quad u = \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur I.

Comme f est intégrable sur I, alors

$$(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t) = \frac{\ell n(1/t)}{1+(1/t)^2}\cdot\frac{-1}{t^2} = \frac{\ell n\, t}{1+t^2} = f(t)$$

est intégrable sur I (ce qui ne nous apprend rien !) et

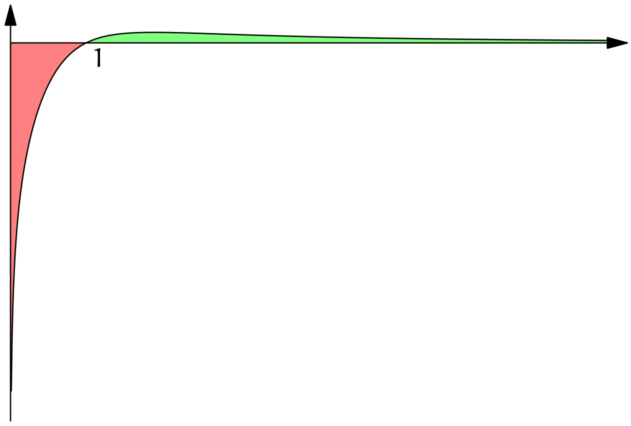
$$\int_{0}^{+\infty} (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{+\infty}^{0} f(u)\,du.$$

Autrement dit,

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} f(u)\,du$$

et par conséquent,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ell n\, u}{1+u^2}\,du = 0.$$



L'aire verte et l'aire rouge se compensent exactement !

2. On considère maintenant la fonction continue g définie par

$$\forall\, u \in \,]0, +\infty[\,, \quad g(u) = \frac{\ell n\, u}{a^2 + u^2}$$

et le changement de variable *affine* ψ défini par

$$\forall\, x \in I, \quad u = \psi(t) = at,$$

qui réalise une bijection de I sur I.

La fonction (de t) définie par

$$(g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t) = a \frac{\ell n(at)}{a^2 + (at)^2} = \frac{1}{a} \frac{(\ell n\, t + \ell n\, a)}{1 + t^2} = \frac{f(t)}{a} + \frac{\ell n\, a}{a} \frac{1}{1 + t^2}$$

est intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables. D'après le théorème de changement de variable, la fonction g est elle aussi intégrable sur I et, comme les deux termes de cette somme sont intégrables, on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(u)\, du &= \int_0^{+\infty} (g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt + \frac{\ell n\, a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\ell n\, a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}\, dt = \big[\text{Arctan}\, t\big]_0^x = \text{Arctan}\, x$$

(puisque $\text{Arctan}\, 0 = 0$) et, en faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

et on obtient enfin que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \frac{\ell n\, a}{a}.$$

Voici comment on peut créer (à peu près) la figure qui illustre le calcul.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# En général, les coloristes donnent les 3 composantes RVB
# en nombres entiers (entre 0 et 255) là où Python attend
# un triplet de réels compris entre 0.0 et 1.0.
def rvb(rouge, vert, bleu):
    return (rouge/255.0, vert/255.0, bleu/255.0)

# Pour l'inspiration :
# http://www.chromaticstore.com/outils
#        puis : "Lancer l'application" et "Nuancier"
# http://www.agence-casanova.fr/professionnel/
#                                identitaire/pantone.html
# Et après on ajuste selon son goût...

# On définit la fonction f (automatiquement
# vectorialisée, puisqu'on utilise le log de numpy).
def f(x):
    return np.log(x)/(1+x**2)

# On crée un échantillon d'abscisses
x = np.linspace(0.05,10)
# On prend l'image de cet échantillon par f (tout
# l'intérêt de la vectorialisation apparaît ici)
y = f(x)
# On trace la courbe
plt.plot(x,y,'black')
# On colore les aires selon la position par rapport
# à l'axe des abscisses
plt.fill_between(x, y, where=y>=0,\
                 facecolor=rvb(150, 224, 150))
plt.fill_between(x, y, where=y<=0,\
                 facecolor=rvb(234, 107, 123),
                 interpolate=True)
# Et on affiche
plt.show()
```

Solution 3

Les deux intégrales se simplifient à l'aide d'un même changement de variable affine qui transporte l'intervalle $J =]a, b[$ sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

On cherche donc une fonction affine φ telle que

$$\varphi(a) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = 1.$$

D'après la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange,

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi(a) \cdot \frac{b-t}{b-a} + \varphi(b) \cdot \frac{t-a}{b-a} &= \frac{(t-b)+(t-a)}{b-a} \\ &= \frac{2t-(a+b)}{b-a}. \end{aligned}$$

✍ *Pourquoi chercher l'expression de φ quand le cours nous donne la formule ? Il nous reste à la simplifier.*

En particulier,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \frac{2}{b-a} > 0.$$

De plus, $\psi(t) = 1 - \varphi(t)$ est une fonction affine telle que $\psi(a) = 2$ et $\psi(b) = 0$ et $\chi(t) = 1 + \varphi(t)$ est une fonction affine telle que $\chi(a) = 0$ et $\chi(b) = 2$, donc
$$\psi(t) = 2 \cdot \frac{b-t}{b-a} \quad \text{et} \quad \chi(t) = 2 \cdot \frac{t-a}{b-a}.$$
Par conséquent,
$$1 - \varphi^2(t) = \big(1-\varphi(t)\big)\big(1+\varphi(t)\big) = 4 \cdot \frac{(b-t)(t-a)}{(b-a)^2}.$$

✍ *J'espère avoir convaincu les masses de l'utilité **pratique** des polynômes interpolateurs de Lagrange (au moins pour le cas du premier degré).*

1. La fonction
$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$
est intégrable sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ (fonction de référence) et
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}\, 1 - \text{Arcsin}(-1) = \pi.$$

❧ D'après le Théorème de changement de variable, la fonction définie par
$$(f \circ \varphi)(t).\varphi'(t) = \frac{b-a}{2\sqrt{(b-t)(t-a)}} \cdot \frac{2}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$$
est intégrable sur J et comme φ' est une fonction **positive**,
$$\int_J (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t)\, dt = \int_I f(x)\, dx.$$
Autrement dit,
$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

✍ *Une rédaction claire ne suit pas la chronologie des calculs !*
Initialement, on considère l'intégrale sur $]a, b[$ d'une fonction $g(t)$. Cette intégrale nous pousse à introduire une nouvelle variable
$$x = \frac{2t - (a+b)}{b-a}$$
et c'est ce changement de variable qui nous conduit à définir une nouvelle fonction $f(x)$ (sur un nouvel intervalle) telle que
$$\forall\, t \in]a, b[, \quad g(t) = (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t).$$
Dans un souci de clarté, il vaut mieux commencer la démonstration en introduisant cette fonction $f(x)$ et revenir progressivement à la fonction $g(t)$.

2. La fonction
$$f = \left[x \mapsto \sqrt{1-x^2}\right]$$
est continue sur le segment $I = [-1, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle.

On applique le Théorème de changement de variable à la fonction affine φ définie plus haut : la fonction définie par
$$g(t) = (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t) = \frac{2\sqrt{(b-t)(t-a)}}{b-a} \cdot \frac{2}{b-a}$$
est intégrable sur $J = [a, b]$ et comme φ' est une fonction **positive**,
$$\int_J g(t)\, dt = \int_I f(x)\, dx.$$

✍ *Pour une fois, une partie du Théorème ne sert strictement à rien : la fonction g est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est évidemment intégrable sur cet intervalle. On n'a pas attendu le Théorème pour le savoir !*

Autrement dit,

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b \sqrt{(b-t)(t-a)}\,dt = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

❧ Les amateurs de calculs de primitives (tous les vices sont dans la nature) se précipitent sur un nouveau changement de variable.

La fonction $\psi = [\theta \mapsto \cos\theta]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ (et **décroissante**) du segment $[0,\pi]$ sur le segment $[-1,1]$.

La fonction définie par

$$\begin{aligned}(f\circ\psi)(\theta).|\psi'(\theta)| &= \sqrt{1-\cos^2\theta}.|-\sin\theta|\\ &= \sin^2\theta \qquad\qquad (\text{car } 0\leqslant\theta\leqslant\pi \text{ et } \sin\theta\geqslant 0)\end{aligned}$$

est (évidemment !) intégrable sur le segment $[0,\pi]$ et

$$\int_{[0,\pi]}(f\circ\psi)(\theta).|\psi'(\theta)|\,d\theta = \int_{[-1,1]} f(x)\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta.$$

✍ *La décroissance de φ nous a incité à conserver la valeur absolue sur φ', ce qui nous permet de conserver les bornes de l'intégrale dans l'ordre croissant. (C'est une commodité, pas une nécessité. La seule nécessité est de ne pas faire de faute de signe.)*

Il reste à linéariser :

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

pour trouver la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_a^b\sqrt{(b-t)(t-a)}\,dt = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

❧ Les géomètres s'épargneront ce dernier changement de variable. En effet, l'aire sous la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe d'équation $x^2+y^2=1$: c'est l'aire d'un demi-cercle de rayon 1, soit $\pi/2$.

✍ *Les **vrais** géomètres auront remarqué dès le début qu'on calculait l'aire d'un demi-disque de diamètre $[a,b]$, soit*

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Solution 4

On sait que la fonction $f = [x\mapsto e^{-x^2}]$ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ (fonction de référence). De plus, il s'agit d'une fonction paire, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Même si la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, on peut considérer qu'il s'agit ici d'une intégrale sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.

La fonction $\varphi = \left[t\mapsto\sqrt{t}\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection (croissante) de $J =]0,+\infty[$ sur $I =]0,+\infty[$. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction

$$(f\circ\varphi)(t).\varphi'(t) = e^{-(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

est intégrable sur J et de plus, comme φ' est une fonction **positive**,

$$\int_J \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_I e^{-x^2}\,dx.$$

✍ *La remarque sur le signe de $\varphi'(t)$ sert à justifier l'absence de valeur absolue.*

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Solution 5

Soit f, une fonction continue sur le segment $I_0 = [-1, 1]$. La fonction g définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est donc continue sur l'intervalle *ouvert* $I =]-1, 1[$.

❧ La fonction $\varphi = [\theta \mapsto \cos\theta]$ réalise une bijection (décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $J =]0, \pi[$ sur l'intervalle I. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction

$$\begin{aligned}(g \circ \varphi)(\theta).|\varphi'(\theta)| &= \frac{f(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \cdot |-\sin\theta| \\ &= \frac{f(\cos\theta)}{\sin\theta} \cdot \sin\theta = f(\cos\theta) \qquad \text{(car } \sin\theta > 0 \text{ sur } J)\end{aligned}$$

est intégrable sur J. Or la composée $[\theta \mapsto f(\cos\theta)]$ est continue sur le segment $J_0 = [0, \pi]$

$$\begin{array}{ccccc} J_0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta & \longmapsto & f(\cos\theta) \end{array}$$

donc elle est intégrable sur $J \subset J_0$, ce qui prouve que $g(x)$ est intégrable sur I.

De plus,

$$\int_J (g \circ \varphi)(\theta).|\varphi'(\theta)|\, d\theta = \int_I g(x)\, dx$$

c'est-à-dire (en plaçant les bornes dans l'ordre croissant)

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta.$$

❧ De même, la fonction $\psi = [\theta \mapsto \sin\theta]$ réalise une bijection (croissante cette fois) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert $K =]-\pi/2, \pi/2[$ sur l'intervalle I. D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction

$$\begin{aligned}(g \circ \psi)(\theta).|\psi'(\theta)| &= \frac{f(\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot |\cos\theta| \\ &= \frac{f(\sin\theta)}{\cos\theta} \cdot \cos\theta = f(\sin\theta) \qquad \text{(car } \cos\theta > 0 \text{ sur } K)\end{aligned}$$

est intégrable sur K. Or la composée $[\theta \mapsto f(\sin\theta)]$ est continue sur le segment $K_0 = [-\pi/2, \pi/2]$

$$\begin{array}{ccccc} K_0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta & \longmapsto & f(\sin\theta) \end{array}$$

donc elle est intégrable sur $K \subset K_0$, ce qui prouve (à nouveau !) que $g(x)$ est intégrable sur I.

De plus,

$$\int_K (g \circ \psi)(\theta).\psi'(\theta)\, d\theta = \int_I g(x)\, dx$$

(sans valeur absolue car, cette fois, $\psi'(\theta) > 0$) et donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin\theta)\, d\theta.$$

Solution 6

La fonction
$$f = \left[t \mapsto \frac{t-1}{\ell n\, t}\right]$$
est évidemment continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0,
$$f(t) \sim \frac{-1}{\ell n\, t} \longrightarrow 0.$$
Lorsque t tend vers 1,
$$f(t) = \frac{(t-1)}{\ell n[1-(1-t)]} \sim \frac{(t-1)}{-(t-1)} \longrightarrow -1.$$
La fonction f admet donc un prolongement continu sur le segment $[0,1]$ (en posant $f(0)=0$ et $f(1)=-1$), donc elle est intégrable sur $]0,1[$.

✍ *Seul le prolongement de f est intégrable sur le segment $[0,1]$, car f elle-même* n'est pas définie *sur le segment $[0,1]$, mais seulement sur l'ouvert $]0,1[$.*

❧ La fonction $\varphi = [x \mapsto t = e^{-x}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $]0,1[$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Comme $f(t)$ est intégrable sur $]0,1[$, le Théorème du changement de variable nous assure que
$$f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = \frac{e^{-x}-1}{\ell n(e^{-x})}\cdot(-e^{-x}) = \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$
est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que
$$I = \int_{+\infty}^{0} f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

❧ Puisque la fonction
$$\left[x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\right]$$
est intégrable sur $]0,+\infty[$, on sait que
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$
Comme les deux fonctions
$$\left[x\mapsto\frac{e^{-x}}{x}\right] \quad\text{et}\quad \left[x\mapsto\frac{e^{-2x}}{x}\right]$$
sont intégrables sur $[\varepsilon,+\infty[$ (continues sur cet intervalle et $o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$), on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :
$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$
Le changement de variable AFFINE $y=2x$ dans la dernière intégrale nous donne :
$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

❧ Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $x\in[\varepsilon,2\varepsilon]$,
$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{x}.$$
En intégrant sur $[\varepsilon,2\varepsilon]$, on en déduit que
$$e^{-2\varepsilon}\,\ell n\,2 \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\,dx \leqslant e^{-\varepsilon}\,\ell n\,2$$
et, par encadrement, que $I = \ell n\,2$.

✍ ***Variante 1.***
La fonction $[x \mapsto (e^{-x}-1)/x]$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *et tend vers* -1 *au voisinage de* 0*, donc elle est intégrable au voisinage de* 0*. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que*

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \int_0^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx - \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0-0=0.$$

Par conséquent, en vertu de l'Astuce taupinale,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx &= \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \\ &= \ell n\, 2 + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ell n\, 2 + 0.\end{aligned}$$

On prendra soin de ne jamais invoquer la linéarité pour des intégrales divergentes !

✍ ***Variante 2.***
La fonction $g = [x \mapsto e^{-x}/x]$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *et* $g(x) \sim {}^1\!/_x$ *au voisinage de* 0*. Comme la fonction* $[x \mapsto {}^1\!/_x]$ *est continue et positive mais pas intégrable au voisinage de* 0*, on en déduit que*

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ell n\,\varepsilon$$

(Théorème d'intégration des ordres de grandeurs, version divergente).
Mais cela nous conduit à

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \big[\ell n\, 2\varepsilon - \ell n\,\varepsilon + o(\ell n\,\varepsilon)\big] = o(\ell n\,\varepsilon),$$

ce qui ne nous permet pas de conclure !

Solution 7

Comme a tend vers $+\infty$, on peut supposer que $a > 1$. Par conséquent, la fonction intégrande définie par

$$f(x) = \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur l'intervalle $]-1,1[$.
De plus,

$$f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(a+1)\sqrt{1+x}} = \frac{K}{(x-x_0)^{\alpha}}$$

avec $x_0 = -1$ et $\alpha = {}^1\!/_2 < 1$, donc f est intégrable au voisinage de -1.
De même,

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(a-1)\sqrt{1-x}} = \frac{K'}{(x_0-x)^{\alpha}}$$

avec $x_0 = 1$ et $\alpha = {}^1\!/_2 < 1$, donc f est intégrable au voisinage de 1.
Ainsi, la fonction f est intégrable sur $]-1,1[$.
❧ Pour $a > 1$,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\quad \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a-x} < \frac{1}{a-1}$$

et comme $\sqrt{1-x^2} > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\quad \frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{$\star$}$$

Comme la fonction Arcsin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est convergente et égale à $\operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1) = \pi$.

✍ *On vient d'appliquer ici la version généralisée du Théorème fondamental. Si on entre dans les détails, on commence par remarquer que*

$$\forall\ -1 < A \leqslant B < 1, \quad \int_A^B \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} B - \operatorname{Arcsin} A$$

(version classique du Théorème fondamental, appliquée à une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$) avant d'en déduire que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1)$$

en faisant tendre A vers -1 et B vers 1, la continuité de la fonction Arcsin intervenant dans le second membre.

✍ *On peut aussi remarquer, mais ça ne sert à rien ici, que la convergence de cette intégrale généralisée prouve que la fonction*

$$\left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

est intégrable sur $]-1,1[$. En effet, cette fonction étant ***positive****, la convergence de l'intégrale équivaut à la convergence absolue de l'intégrale.*

On peut donc intégrer l'encadrement ($\star$) et obtenir

$$\forall\ a > 1, \quad \frac{\pi}{a+1} \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{a-1}.$$

On en déduit en particulier que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{a}.$$

Solution 8

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall\ t > 0, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t^2}}{t^n}$$

est clairement continue sur $]0,+\infty[$ et $f_n(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc la fonction f_n est intégrable sur $[x,+\infty[$ pour tout $x > 0$.

❧ On fixe dorénavant un entier $n \geqslant 2$.
Comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^2}\right]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\ t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{e^{-x^2}}{t^n}. \tag{1}$$

Comme $n \geqslant 2$, le majorant est une fonction (de la variable t) intégrable sur $[x,+\infty[$:

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant e^{-x^2} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{e^{-x^2}}{(n-1)x^{n-1}}.$$

On en déduit enfin que

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big) \tag{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. (Comme n est *fixé*, le facteur $(n-1)$ qui figure au dénominateur doit être traité comme une constante.)

✍ *Comme f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait* ***[10.3]*** *que l'intégrale*

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. L'ordre de grandeur (2) est plus précis.

✍ *On peut faire encore plus précis car l'encadrement (1) est tout juste digne d'un* stagiaire.

Le Maître *verra, lui, l'encadrement suivant :*

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) = \frac{te^{-t^2}}{t^{n+1}} \leqslant \frac{te^{-t^2}}{x^{n+1}}$$

et en déduira, par intégration sur $[x, +\infty[$*, que*

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}}$$

et par conséquent que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ *(et pas seulement* $n \geqslant 2$*),*

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}}\Big) \tag{3}$$

lorsque x *tend vers* $+\infty$.

2. Nous allons intégrer par parties pour trouver un ordre de grandeur plus précis (méthode archi-classique). Pour $0 < x < y$, on remarque que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{1}{2}\int_x^y \frac{2te^{-t^2}}{t^{n+1}}\,dt$$

et on en déduit que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \Big[\frac{-e^{-t^2}}{2t^{n+1}}\Big]_x^y - \int_x^y \frac{-(n+1)}{2} \cdot \frac{-e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Comme les fonctions f_n et f_{n+2} sont intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall\, x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt. \tag{4}$$

On déduit alors de (3) (avec $n \leftarrow n+2$) que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{(n+2)+1}}\Big) = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+3}}\Big), \tag{5}$$

estimation digne d'un *Grand maître* (comparer avec (3)...).

❧ On en déduit en particulier (pour $n = 0$) que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Mais ce n'est pas tout ! Les deux intégrales de (4) sont du même type : on peut donc itérer le procédé. On en déduit (pour $n = 0, 2, 4$ puis 6) que

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt \\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{15e^{-x^2}}{16x^7} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^9}\Big).
\end{aligned}$$

Le Grand maître n'arrête de calculer que par faute de place !

Solution 9

1. Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}\right]$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{t}{x})^2}}\right)\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Or, pour tout $u \geqslant 0$, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{u}{\sqrt{1+u}(\sqrt{1+u}+1)} \leqslant \frac{u}{2} \qquad (\star)$$

puisque le dénominateur est manifestement supérieur à 2.

✍ *On peut aussi déduire l'inégalité $(\star)$ du Théorème fondamental :*

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{-1}{\sqrt{1+u}} - \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot u$$

puisque, pour tout $0 \leqslant z \leqslant u$,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+z}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+z)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

✍ *On peut également la voir comme une inégalité de convexité : la fonction*

$$\left[u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}\right]$$

est convexe sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\forall\, u \geqslant 0, \qquad \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}\right) = \frac{3}{4(1+u)^{5/2}} \geqslant 0$$

et comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$$

lorsque u tend vers 0, on en déduit que

$$\forall\, u \geqslant 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+u}} \geqslant 1 - \frac{u}{2}$$

(une fonction convexe est minorée par sa tangente).

Comme l'intégration conserve les inégalités (les bornes sont ici dans l'ordre croissant), on en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) \leqslant \frac{1}{x^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{2\sqrt{1+t^2}}$$

et donc que

$$f(x) - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

pour $x \to +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

❧ On en déduit en particulier que

$$f(x) \sim \frac{K_1}{x}$$

au voisinage de $+\infty$, avec

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{Arg\,sh} 1 = -\ell n(\sqrt{2}-1).$$

✍ *Cette dernière remarque s'adresse à ceux qui, méprisant le Programme Officiel, connaissent la dérivée de la fonction* $\operatorname{Arg\,sh}$.

3. On procède bien entendu de la même manière. Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}.$$

D'après l'encadrement $(\star)$,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \frac{t^2}{2}$$

et par conséquent,

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{t}{2}$$

puisque $\sqrt{x^2+t^2} \geqslant \sqrt{0+t^2} = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

L'intégration conserve les inégalités, donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{t}{2}\, dt$$

pour tout $x > 0$, ce qui prouve que la différence

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} - f(x),$$

considérée comme une fonction de x, reste bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

lorsque $x \to 0^+$.

Pour tout $x > 0$, le changement de variable affine $u = t/x$ et la relation de Chasles donnent

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}}_{\text{Cte}} + \int_1^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Lorsque x tend vers 0^+, l'expression $1/x$ tend vers $+\infty$ et lorsque u tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \sim \frac{1}{u}.$$

Or $[u \mapsto 1/u]$ est une fonction *positive* et *non intégrable* au voisinage de $+\infty$, donc

$$\int_1^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \sim \int_1^{1/x} \frac{du}{u} = -\ln x$$

lorsque x tend vers 0^+. On en déduit que

$$f(x) = \big[\text{Cte} - \ln x + o(\ln x)\big] + \mathcal{O}(1)$$

et donc que

$$f(x) \sim -\ln x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *Là encore, si on connaît la dérivée d'*$\operatorname{Arg\,sh}$,

$$\int_0^{1/x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \sim -\ln x.$$

On est quand même plus efficace quand on est plus savant...

Solution 10

La fonction f définie par
$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2}$$
est continue sur l'intervalle ouvert $I =]0, +\infty[$. De plus,
$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big),$$
donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale généralisée
$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
est bien définie pour tout $x > 0$.

❧ Comme
$$f(t) = \cos t \cdot \frac{1}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} g(t) = \frac{1}{t^\alpha} \qquad \text{avec } \alpha = 2 \geqslant 1,$$
la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de 0.

La fonction de référence g est **positive**, intégrable au voisinage de $+\infty$ mais non intégrable au voisinage de 0, le Théorème d'intégration des ordres de grandeur nous assure que
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{1}{x}.$$

Solution 11

1. On doit bien sûr *commencer* par justifier l'existence de l'intégrale généralisée $F(x)$.

❧ La fonction f définie par
$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$$
est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$,
$$f(t) = o(e^{-t}),$$
donc f est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

✍ *Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim {}^1\!/\!_t$, donc f est intégrable sur tous les intervalles $[x, +\infty[$ (avec $x > 0$) sans être pour autant intégrable sur $]0, +\infty[$. Cela mérite qu'on s'en souvienne...*

Étude au voisinage de $+\infty$

La fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est une fonction *positive* et *intégrable* au voisinage de $+\infty$. Comme $f(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, alors on déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison que
$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\Big).$$
Or, pour tout $x > 0$,
$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \big[-e^{-t}\big]_x^{+\infty} = e^{-x},$$
donc
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-x}). \tag{6}$$

✍ *Comme f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on pouvait affirmer directement que*
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
(il s'agit du "reste" d'une intégrale convergente) mais on a obtenu ici un résultat bien plus précis.

Étude au voisinage de 0

La fonction $[t \mapsto 1/t]$ est une fonction *continue*, *positive* et NON *intégrable* au voisinage de 0. Comme $f(t) \sim 1/t$ au voisinage de 0, alors on déduit du Théorème d'intégration des relations de comparaison que

$$\int_x^1 f(t)\,dt \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ell n\, x.$$

Comme f est intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit de la relation de Chasles que

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt}_{=\text{Cte}} \underset{x\to 0}{=} -\ell n\, x + o(\ell n\, x) + \mathcal{O}(1) \sim -\ell n\, x. \tag{7}$$

✍ *On a dit plus haut que* f *était positive, intégrable au voisinage de* $+\infty$*, mais pas intégrable au voisinage de* 0*. On aurait pu en déduire directement que*

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

En appliquant un théorème d'intégration des relations de comparaison, on a obtenu ici un résultat bien plus précis (bis).

2. Comme la fonction f (définie plus haut) est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qu'elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, la fonction F est en fait une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, primitive de $-f$ (généralisation du Théorème fondamental).

Plus précisément, la fonction F est **la** primitive de $-f$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *Rappelons que deux primitives d'une fonction* g *sur un* intervalle I *diffèrent d'une constante.*

Par conséquent, la fonction $-f$ *admet* ***au plus une*** *primitive sur* $]0, +\infty[$ *qui tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$ *et, comme on l'a justifié plus haut, la fonction* F *est cette primitive.*

De même, la fonction $-f$ *admet* ***au plus une*** *primitive sur* $]0, +\infty[$ *qui tend vers* 0 *au voisinage de* 0*. Mais comme la fonction* f *est positive et qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de* 0*,* toutes *ses primitives tendent vers* $+\infty$ *au voisinage de* 0*.*

D'après les ordres de grandeur (6) et (7), la fonction F est intégrable au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, la fonction F est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$$

est convergente et, par définition,

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} \int_a^b F(x)\,dx.$$

❧ Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$, nous pouvons intégrer par parties : quels que soient $0 < a < b$,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)\,dx &= \big[xF(x)\big]_a^b - \int_a^b xF'(x)\,dx \\ &= bF(b) - aF(a) + \int_a^b xf(x)\,dx. \end{aligned}$$

Or $xf(x) = e^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et d'autre part, d'après (6) et (7) :

$$bF(b) \underset{b\to+\infty}{=} o(be^{-b}) \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$$

et

$$aF(a) \underset{a\to 0}{\sim} -a\,\ell n\, a \xrightarrow[a\to 0]{} 0.$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1.$$

3. On intègre à nouveau par parties en dérivant la fraction (et donc en intégrant l'exponentielle).
Quels que soient $0 < x < y$ *fixés*,

$$\int_x^y \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y -\frac{-e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

La fonction f_2 définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f_2(t) = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et $f_2(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc f_2 est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$. On peut donc faire tendre y vers $+\infty$ et en déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt. \tag{8}$$

❧ Il nous reste à estimer la dernière intégrale à l'aide d'un encadrement simple.

✍ *La méthode qui suit est archi-classique.*

Il est clair que

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}. \tag{9}$$

Les trois fonctions de cet encadrement étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x^2}. \tag{10}$$

Cet encadrement montre que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \mathcal{O}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right) \tag{11}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On déduit alors de (8) que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right). \tag{12}$$

✍ *Il faut acquérir un peu d'expérience (c'est-à-dire faire pas mal de calculs) avant d'arriver spontanément à l'encadrement* (9). *L'encadrement suivant serait tout aussi juste :*

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{t^2}$$

mais donnerait après intégration :

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x}$$

ce qui serait infiniment moins utile que (10)*, puisqu'on pourrait seulement en déduire que*

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

4. Soit $x > 0$. La fonction *affine* $\psi(t) = x(t + x)$ réalise une bijection (croissante) de $J = [0, +\infty[$ sur $I = \left[x^2, +\infty\right[$ et

$$\forall\, t \in J, \quad \frac{e^{-xt}}{x+t} = e^{x^2}\cdot\frac{e^{-x(t+x)}}{x(t+x)}\cdot x = e^{x^2}\cdot f\big(\psi(t)\big)\cdot\big|\psi'(t)\big|.$$

On a démontré à la première question que $f(u)$ était intégrable sur l'intervalle I, le Théorème de changement de variable nous assure alors que

$$\left[t \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}\right]$$

est bien intégrable sur l'intervalle J et que, de plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} \cdot f\big(\psi(t)\big) \cdot \big|\psi'(t)\big| \, dt = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} f(u) \, du$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x) = e^{x^2} F(x^2).$$

❧ On déduit alors de (7) et du Théorème de composition des limites que

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x^2)}{-\ell n(x^2)} = 1$$

(puisque x^2 tend vers 0 lorsque x tend vers 0). Par conséquent,

$$F(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} -2\,\ell n\, x$$

et donc

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2e^{x^2}\,\ell n\, x.$$

❧ De manière analogue, comme x^2 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on déduit du développement asymptotique (12) que

$$F(x^2) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{e^{-x^2}}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^4}\Big).$$

Par conséquent,

$$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Solution 12

La fonction f définie par

$$f(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}$$

est continue sur l'intervalle ouvert $I_0 =]0, +\infty[$. De plus, $f(t)$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0 (forme indéterminée usuelle), donc f est intégrable au voisinage de 0 et l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

est convergente pour tout $x > 0$.

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f(t) = \operatorname{Arctan} t \cdot \frac{1}{t} \sim g(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

et comme $1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Cela dit, la fonction de référence g est **positive** et continue sur $[1, +\infty[$. Le Théorème d'intégration des ordres de grandeur appliqué sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ nous assure donc que

$$\int_1^x f(t) \, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^x g(t) \, dt = \frac{\pi}{2}\,\ell n\, x.$$

On a ainsi démontré que

$$\int_0^x f(t) \, dt = F(1) + \int_1^x f(t) \, dt \underset{x \to +\infty}{=} F(1) + \Big[\frac{\pi}{2}\,\ell n\, x + o(\ell n\, x)\Big].$$

Comme $F(1)$ est une constante réelle et que $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit enfin que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \ell n\, x.$$

✍ *Il est impossible d'appliquer le Théorème sur l'intervalle $]0, +\infty[$ car la fonction de référence g n'est pas intégrable au voisinage de 0. Il était donc nécessaire d'appliquer la relation de Chasles pour rester sur des intervalles où g était intégrable.*

Solution 13

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction
$$\left[t \mapsto \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\right]$$
est continue sur $[0, +\infty[$ et est $\mathcal{O}(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction f définie par
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\, dt$$
est définie sur $\mathbb{R}$. (Il est clair que cette fonction est *paire*.)

❧ Pour $x \neq 0$,
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad 0 < \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant e^{-x^2 t}$$
et le majorant est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence, dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est connue). Comme l'intégration conserve les inégalités,
$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}\, dt = \frac{1}{x^2}$$
et donc
$$\forall\, x > 0, \quad 0 < x^2 f(x) \leqslant 1$$
ce qui prouve bien que
$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
lorsque x tend vers $+\infty$.

✍ *En particulier, on a prouvé que f tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.*

✍ *D'après ce qui précède, on a aussi $f(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$ lorsque $x \to 0$. Cependant, cette nouvelle relation est dénuée d'intérêt car la fonction de référence $1/x^2$ est infiniment grande au voisinage de 0 tandis que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$:*
$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant \frac{1}{1+t^3}$$
et donc
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = f(0).$$

Solution 14

Pour $t > 0$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le produit nt tend vers $+\infty$ et le produit
$$nf(nt)$$
est une forme indéterminée (a priori, une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ n'a pas de limite au voisinage de $+\infty$). On n'a donc aucun espoir d'appliquer le Théorème de convergence dominée à ces intégrales.

❧ Nous posons donc, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$x = nt \qquad dx = n\, dt$$
pour obtenir
$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^n \frac{f(x)}{1+(x/n)}\, dx.$$
Nouvelle difficulté : l'intervalle d'intégration semble varier avec n, ce qui empêche d'appliquer le Théorème de convergence dominée.

❧ Nous posons donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0, +\infty[, \qquad f_n(x) = \frac{f(x)}{1+(x/n)} \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$$

Comme f est intégrable sur $I = [0, +\infty[$, elle est (par définition) continue par morceaux sur I et les fonctions f_n sont donc elles aussi continues par morceaux sur I.

✍ *Cette astuce doit être utilisée systématiquement pour rendre l'intervalle d'intégration indépendant du paramètre n.*

De plus,

$$f_n(x) = f(x) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,n]}(x)}{1 + (x/n)}$$

est le produit d'une fonction intégrable (f) et d'une fonction continue par morceaux et bornée, donc les fonctions f_n sont bien intégrables sur I et

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

❧ Pour tout $x \in I$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x \leqslant n_0$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad x \leqslant n.$$

On a donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad f_n(x) = f(x) \cdot \frac{1}{1 + (x/n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

(y compris pour $x = 0$!). La suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc simplement sur I vers la fonction f.

❧ Enfin, il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I_0, \qquad |f_n(x)| \leqslant |f(x)| \cdot \frac{1}{1+0} = |f(x)|.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur I_0 (par hypothèse). Nous pouvons donc appliquer le Théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

✍ *Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ n'est pas nulle, on a en fait démontré que*

$$\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Si cette intégrale est nulle, on a démontré que

$$\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\, dt \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le Théorème de convergence dominée peut donc servir à déterminer des ordres de grandeur et pas seulement des limites...

Solution 15

✍ *Le Théorème de convergence dominée ne donne qu'une limite. Pour lui faire calculer un ordre de grandeur, il faut le détourner de son usage normal.*

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et les fonctions f_n définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in I, \qquad f_n(t) = \frac{n \operatorname{Arctan} t/n}{t + t^3}.$$

❧ **Intégrabilité** — Soit $n \geqslant 1$, *fixé.*

► Il est clair que les fonctions f_n sont continues sur l'intervalle ouvert I.

► Lorsque t tend vers 0,

$$f_n(t) \sim n \cdot \frac{t}{n} \cdot \frac{1}{t + t^3} \sim \frac{t}{t} = 1,$$

donc la fonction f_n tend vers une limite finie au voisinage de 0 : elle est donc intégrable au voisinage de 0 (puisqu'elle admet un prolongement continu sur l'intervalle semi-fermé $[0, +\infty[$).

► Lorsque t tend vers $+\infty$,
$$f_n(t) \sim n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^3+t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^3}\Big),$$
donc la fonction f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison à une fonction puissance).

Ainsi, chaque fonction f_n est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

❧ **Convergence simple** — Pour tout $t \in I$, on sait que
$$\operatorname{Arctan} \frac{t}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n},$$
donc la forme indéterminée
$$n \operatorname{Arctan} \frac{t}{n}$$
tend vers t lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur I vers la fonction
$$f = \Big[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\Big],$$
qui est évidemment continue sur I.

❧ **Domination** — Par concavité de la fonction Arctan, on sait que
$$\forall\, u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Arctan} u \leqslant u.$$
Par conséquent,
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \qquad \big|f_n(t)\big| \leqslant \frac{n \cdot t/n}{t+t^3} = \frac{1}{1+t^2}.$$
Le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ et intégrable sur I en tant que fonction de t. Nous pouvons donc appliquer le Théorème de convergence dominée, qui nous assure que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$
On a ainsi démontré que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t/n}{t+t^3}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2n}.$$

Solution 16

✍ *Le Théorème de convergence dominée s'applique sur un intervalle d'intégration indépendant de n. Il faut donc définir les fonctions f_n en tenant compte de cette exigence (astuce classique).*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^n \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,dt = \int_0^n \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,dt + \int_n^{+\infty} 0\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$
où on a posé
$$\forall\, t \in [0,n], \quad f_n(t) = \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t} \quad \text{et} \quad \forall\, t \in]n, +\infty[, \quad f_n(t) = 0.$$
Autrement dit,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \qquad f_n(t) = \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$
❧ **Intégrabilité** — Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est évidemment continue sur $[0, n[$ et sur $]n, +\infty[$. De plus, elle tend vers une limite à gauche finie (égale à $2^n e^{-2n}$) et vers une limite à droite finie (égale à 0) en $t = n$, donc f_n est bien continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Comme f_n est nulle sur $]n, +\infty[$, elle est évidemment intégrable au voisinage de $+\infty$, donc elle est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

❧ **Convergence simple** — Fixons $t \in [0, +\infty[$. Il existe un entier $n_0 \geqslant t$ et par conséquent,
$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(t) = \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t} = \exp\Big[-2t + n\,\ell n\Big(1+\frac{t}{n}\Big)\Big].$$
On sait que
$$\ell n\Big(1+\frac{t}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-2t+n\,\ell n\left(1+\frac{t}{n}\right)\right]=-2t+t=-t$$

et donc, par continuité de exp,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)=\exp(-t).$$

Il est clair que la fonction $f=[t\mapsto\exp(-t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$.

❧ **Domination —** Par convexité de exp, on sait que

$$\forall\, u\in\mathbb{R},\quad 1+u\leqslant\exp(u).$$

En particulier,

$$\forall\, u\in[0,+\infty[\,,\quad 0\leqslant 1+u\leqslant\exp(u).$$

Comme $[u\mapsto u^n]$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \forall\, t\in[0,n],\qquad 0\leqslant\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\left(\exp{}^t\!/_n\right)^n=e^t$$

et donc que

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \forall\, t\in[0,n],\qquad \left|f_n(t)\right|\leqslant e^t\cdot e^{-2t}=e^{-t}.$$

Il est clair que cette majoration est encore vraie pour $t\in\,]n,+\infty[$ (puisque dans ce cas, $f_n(t)=0$).

❧ On a ainsi démontré que la convergence était dominée :

$$\forall\, n\geqslant 1,\ \forall\, t\in[0,+\infty[\,,\qquad \left|f_n(t)\right|\leqslant e^{-t}$$

car le majorant est indépendant de $n\in\mathbb{N}^*$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ en tant que fonction de t.

On peut donc appliquer le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt=1.$$

Solution 17

On considère l'intervalle $I=\,]0,+\infty[$.

Pour tout entier $k\geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t\in I,\qquad u_k(t)=te^{-kt}.$$

❧ Pour tout $k\geqslant 1$, la fonction u_k est continue sur l'intervalle ouvert I.

Elle tend vers 0 (= une limite finie) au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$u_0(t)=te^{-t/2}\cdot e^{-t/2}=o(e^{-t/2})$$

et

$$\forall\, k\geqslant 2,\quad u_k(t)=te^{-(k-1)t}\cdot e^{-t}=o(e^{-t})$$

donc u_k est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi chaque fonction u_k est intégrable sur I.

❧ La série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I en tant que série géométrique de raison $0<e^{-t}<1$ (puisque $t>0$) et

$$\forall\, t>0,\qquad S(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)=t\sum_{k=1}^{+\infty}(e^{-kt})^k=\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}=\frac{t}{e^t-1}.$$

❧ On voit sur l'expression précédente que la somme S est continue sur I.

❧ Enfin, pour tout $k\geqslant 1$,

$$\int_I\left|u_k(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}te^{-kt}\,dt=\frac{1}{k^2}$$

(par intégration par parties, bien sûr).

► Comme la série $\sum {}^1\!/_{k^2}$ est convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme : la somme S est donc intégrable sur I et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

✍ *Et si on avait choisi $I = [0, +\infty[$?*
❧ *L'étude de l'intégrabilité était simplifiée : chaque fonction u_k étant continue sur $[0, +\infty[$, il suffisait de l'étudier au voisinage de $+\infty$ pour justifier son intégrabilité.*
❧ *La convergence simple était un peu plus délicate ! Pour $t = 0$, on n'a plus une série géométrique convergente (la raison est égale à 1), mais une série de terme général nul (à cause du facteur t).*
❧ *La régularité de la somme était plus délicate aussi ! Un développement limité montre que $S(t)$ tend vers 1 au voisinage droit de 0 alors que $S(0) = 0$ (somme de la série de terme général nul). Par conséquent, S est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite à droite finie en 0, donc S est bien continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ (sans être continue sur cet intervalle).*

Solution 18

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé (une fois pour toutes). On étudie ici la fonction S définie par

$$S(t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sin(xt) \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n \sin xt,$$

c'est-à-dire à la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \quad u_n(t) = e^{-nt} \sin(xt).$$

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$. Pour t voisin de $+\infty$, on a $u_n(t) = \mathcal{O}(e^{-nt})$ et comme $n > 0$, on en déduit que u_n est intégrable sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
❧ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I (en tant que somme d'une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$).
❧ La somme S de cette série est clairement continue sur I (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I).
❧ Il reste maintenant à prouver que la série de terme général

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt$$

est convergente afin de pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
❧ **Première tentative (ratée)**
Soit $n \geqslant 1$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \quad \left|u_n(t)\right| \leqslant e^{-nt}. \tag{13}$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}.$$

Hélas, la série harmonique $\sum {}^1\!/_n$ est divergente et cette première majoration ne permet pas de conclure.
✍ *On peut comprendre cet échec en étudiant l'intégrabilité de la fonction S. Cette fonction est clairement continue sur $]0, +\infty[$ et*

$$\left|S(t)\right| = \frac{\left|\sin(xt)\right|}{1 - e^{-t}} \cdot e^{-t}$$

donc $S(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Mais lorsque t tend vers 0,

$$S(t) \sim \frac{xt}{t} = x$$

donc S admet une limite finie en 0^+, tandis que

$$\frac{1}{e^t - 1} \sim \frac{1}{t}.$$

On voit maintenant qu'en éliminant le sin *dans la majoration* (13)*, on perd le facteur qui rend S intégrable au voisinage de l'origine. Il faut donc chercher un majorant qui tienne compte du* sin *!*

❧ **Deuxième tentative (efficace)**
On *doit savoir* que
$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad |\sin u| \leqslant |u|. \tag{14}$$
On en déduit que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant |xt|e^{-nt} \tag{15}$$
et la fonction $[t \mapsto te^{-nt}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 1$. Par positivité de l'intégrale,
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant |x| \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt = \frac{|x|}{n^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du$$
avec le changement de variable affine $u = nt$.

Comme $[u \mapsto ue^{-u}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on l'a déjà dit), la dernière intégrale est un réel fini (qu'il est inutile de préciser — il est égal à 1). On a donc démontré cette fois que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{16}$$
et donc que la série $\sum I_n$ est convergente.

❧ On peut alors déduire du théorème d'intégration terme à terme que
$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt.$$
Or, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \mathfrak{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+ix)t}\,dt = \mathfrak{Im}\Big[\frac{e^{(-n+ix)t}}{-n+ix}\Big]_0^{+\infty} = \frac{x}{n^2+x^2},$$
donc finalement
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

❧ **Variantes**
On peut établir l'ordre de grandeur (16) de deux autres manières, plus précises (mais plus longues aussi).

❧ Le changement de variable *affine* $u = xt$ en supposant $\boxed{x > 0}$, la relation de Chasles et le second changement de variable *affine* $v = u - k\pi$ (pour $k \in \mathbb{N}$) nous donnent
$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}|\sin xt|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-nu/x}|\sin u|\frac{du}{x} \tag{17}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-nu/x}|\sin u|\frac{du}{x} \tag{18}$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nk\pi/x} \int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv \tag{19}$$
puisque $\sin v \geqslant 0$ pour tout $v \in [0, \pi]$.

Dans (19), l'intégrale ne dépend plus de k et on peut (pardon : on doit !) reconnaître une somme géométrique. Par conséquent,
$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}|\sin xt|\,dt = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-n\pi/x}} \int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv. \tag{20}$$

❧ Classiquement, on trouve un ordre de grandeur d'une telle intégrale en intégrant par parties. Pour le coup, il faut intégrer *deux fois* par parties (à chaque fois en intégrant l'exponentielle et en dérivant la composante trigonométrique). On trouve :
$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv = \frac{x}{n}\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\cos v\,dv, \tag{21}$$
$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\cos v\,dv = \frac{1 + e^{-n\pi/x}}{n} \cdot x + \frac{x}{n}\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv \tag{22}$$
et en combinant (21) et (22), on trouve
$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv = \frac{x^2}{n^2}\big(1 + e^{-n\pi/x}\big) - \frac{x^2}{n^2}\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv. \tag{23}$$

❧ Devant (23), deux attitudes sont possibles :

— L'Ancienne école, qui se réjouit de pouvoir en déduire une **expression explicite** de l'intégrale cherchée !

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v \, dv = \frac{x^2}{n^2+x^2}\left(1+e^{-n\pi/x}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{24}$$

— L'École moderne (à laquelle, pour une fois ! j'appartiens) se contente de remarquer que

$$0 \leqslant 1+e^{-n\pi/x} \leqslant 2$$

et que

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v \, dv \leqslant \int_0^{\pi} 1 \, dv = \pi$$

ce qui suffit à donner l'**ordre de grandeur** suivant

$$\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v \, dv = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{25}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Quelle que soit la manière choisie (24) ou (25), l'estimation (16) peut alors être déduite de (23).

✍ *Par principe, l'École moderne n'a pas très envie de calculer des expressions explicites lorsqu'elle peut se contenter d'un ordre de grandeur trouvé d'un coup d'œil (l'École moderne a un très bon coup d'œil) et, si on cherche vraiment à calculer cette intégrale, autant passer par les complexes :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-nv/x} \sin v \, dv &= \mathfrak{Im} \int_0^{\pi} \exp\left[\left(\frac{-n}{x}+i\right)v\right] dv \\ &= \mathfrak{Im}\left[\frac{1}{i-\frac{n}{x}} \exp\left[\left(\frac{-n}{x}+i\right)v\right]\right]_0^{\pi} = \ldots\end{aligned}$$

✍ ***Autre méthode***

Pour intégrer terme à terme, on peut avoir le choix entre le Théorème d'intégration terme à terme (qu'on a choisi d'appliquer) et le Théorème de convergence dominée.

❧ *On a remarqué plus haut que la fonction S est la limite, au sens de la convergence simple sur l'intervalle I, de la suite des fonctions définies par*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t).$$

Or il s'agit d'une somme géométrique *! Donc*

$$\left|f_n(t)\right| = \left|\sin(xt) \cdot \frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} \cdot e^{-t}\right| \leqslant \frac{|\sin xt|\, e^{-t}}{1-e^{-t}} = \left|S(t)\right|$$

et la convergence est dominée : on a trouvé un majorant indépendant *de $n \in \mathbb{N}^*$ et* intégrable *sur I (démontré plus haut). Par conséquent,*

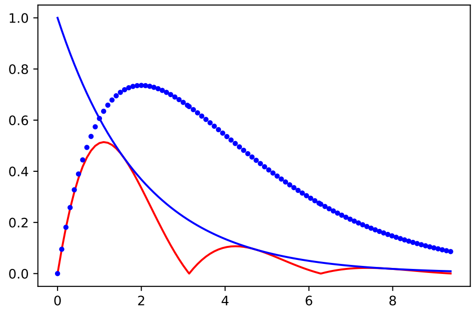
$$\int_0^{+\infty} S(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} u_k(t)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_k(t)\, dt.$$

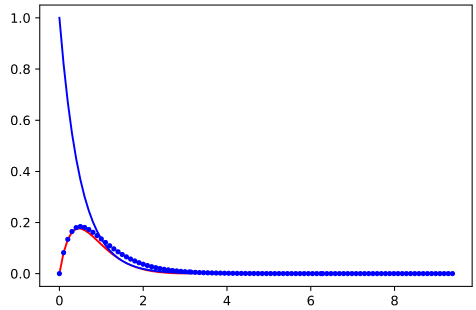
✍ *On peut expliquer graphiquement pourquoi la majoration* (14) *nous a mieux réussi que la majoration* (13) *pour établir la convergence de la série $\sum I_n$.*

En fait, si la majoration (14) *paraît plus grossière que* (13) *(on majore une fonction bornée par une fonction qui n'est pas bornée !), elle est bien plus précise au voisinage de l'origine. C'est l'occasion de se rappeler le principe essentiel formulé par Boris Vian au sujet des bombes atomiques :* "la seule chose qui compte, c'est l'endroit où c'qu'elle tombe".

Dans les deux figures ci-dessous, le graphe de $e^{-nv/x}|\sin v|$ est en trait continu rouge.

Pour les petites valeurs de n (figure de gauche), on voit bien que la majoration (14) *(en pointillés) est moins précise que* (13) *(en trait continu bleu).*

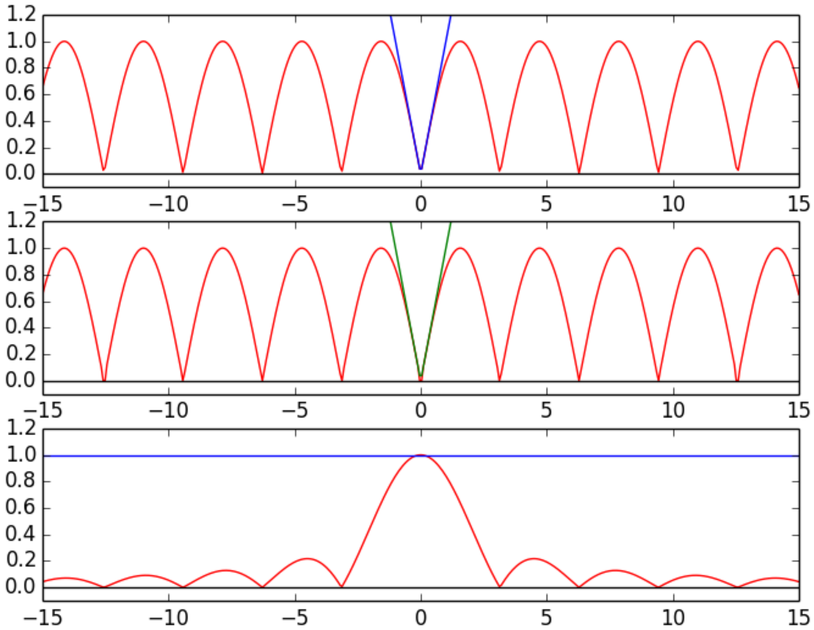




En revanche, pour les grandes valeurs de n (figure de droite), lorsque I_n devient vraiment petit, la majoration (14) *devient bien meilleure que la majoration* (13)*.*

✍ *Un dernier mot, à propos de la majoration* (14)*. Cette majoration peut être comprise d'un point de vue analytique (variations de la fonction* sinus cardinal*) ou d'un point de vue géométrique (concavité de la fonction* sin *sur* $[0, \pi]$*).*

C'est ce que montrent les graphes ci-dessous.



❧ *On pourra retenir la manœuvre effectuée dans le code ci-dessous (lignes 13 à 15) qui rend le second graphe plus beau que le premier (les arches touchent l'axe des abscisses sur la seconde figure, mais pas sur la première).*

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  
4  x = np.linspace(-15, 15, 400) # échantillon des abscisses
5  y = np.abs(np.sin(x))         # image de l'échantillon
6  
7  plt.subplot(3,1,1)
8  plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
9  plt.plot(x, y, 'r')
10 plt.plot(x, np.abs(x), 'b')
11 plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black') # axe des abscisses
12 
13 for i, val in enumerate(y):
14     if val<0.05:
```

```
        y[i] = 0.0

plt.subplot(3,1,2)
plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
plt.plot(x, y, 'r')
plt.plot(x, np.abs(x), 'g')
plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black')

plt.subplot(3,1,3)
plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
plt.plot(x, np.abs(np.sin(x)/x), 'r')
plt.plot(x, np.ones(x.shape), 'b')
plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black')

plt.show()
```

Solution 19

On considère l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t \in I, \qquad u_k(t) = (-1)^k e^{-kt} = (-e^{-t})^k.$$

❧ Pour tout $k \geqslant 1$, la fonction u_k est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$u_k(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-t})$$

donc u_k est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc sur I.

❧ Pour tout $t \in I$, la série $\sum u_k(t)$ est une série géométrique de raison $(-e^{-t})$ et comme $0 < |-e^{-t}| = e^{-t} < 1$, cette série est (absolument) convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur I.

❧ La somme S définie par

$$\forall\, t \in I, \qquad S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = (-e^{-t}) \cdot \frac{1}{1-(-e^{-t})} = \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

est clairement continue sur I.

✍ ***MAIS** la série de terme général*

$$\int_I \left|u_k(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\, dt = \frac{1}{k}$$

est divergente : on ne peut donc pas appliquer le Théorème d'intégration terme à terme.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in I$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right| = \left|\frac{-e^{-t}\big(1-(-e^{-t})^n\big)}{1+e^{-t}}\right| = \frac{1-(-e^{-t})^n}{e^t+1} \leqslant \frac{2}{1+e^t} = g(t)$$

puisque $|-e^{-t}| = e^{-t} \leqslant 1$.

On a trouvé un majorant $g(t)$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, la fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc cette fonction g est bien intégrable sur $I =]0, +\infty[$.

► D'après le Théorème de convergence dominée, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\, dt$$

est convergente et tend vers

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

Autrement dit, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\,dt$$

est convergente et sa somme est connue :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt.$$

On reconnaît une expression de la forme $u'(t)/u(t)$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \ell n(1+e^{-A}) - \ell n(1+e^{-0}) = -\ell n 2 = \ell n \frac{1}{2}.$$

Solution 20

On va constater sur cet exemple qu'on n'a pas toujours besoin du cours sur les intégrales à paramètre pour étudier les propriétés d'une fonction définie par une intégrale.

1. On pose $I = [0, +\infty[$, $\Omega =]0, +\infty[$ et

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{x+t}.$$

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle fermé I et

$$f(x,t) = \frac{1}{x+t} \cdot e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-xt}).$$

Comme $x > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-xt}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

Par conséquent, la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

est bien définie pour tout $x \in \Omega$.

❧ Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto e^{-xt}]$ est décroissante et positive, tandis que la fonction $[x \mapsto x+t]$ est croissante et positive. Par conséquent, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est décroissante et positive.

On a donc

$$\forall\, 0 < x < y,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(y,t) \leqslant f(x,t)$$

et en intégrant cet encadrement, on obtient

$$\forall\, 0 < x < y, \quad 0 \leqslant F(y) \leqslant F(x)$$

ce qui signifie que la fonction F est décroissante et positive sur Ω.

❧ Soit $x > 0$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{e^{-xt}}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot xe^{-xt}$$

et par conséquent

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\,dt = \frac{1}{x^2}.$$

✍ *Il est important de connaître par cœur la valeur de cette dernière intégrale !*

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et donc que F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

✍ *On aurait aussi pu appliquer le théorème de continuité en fonction d'un paramètre (dans la version "existence d'une limite finie").*

2. Pour $x > 0$ fixé, on considère le changement de variable affine :

$$u = x(x+t) = x^2 + xt \qquad du = x\,dt.$$

On en déduit que

$$F(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{xe^{-(u-x^2)}}{u} \cdot \frac{du}{x} = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

❧ Comme la fonction $[u \mapsto e^{-u}/u]$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait que la fonction φ définie par

$$\forall\, y > 0, \qquad \varphi(y) = \int_{y}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

est une primitive de $-e^{-y}/y$.

Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2}\varphi(x^2)$$

donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = 2xF(x) + 2xe^{x^2}\varphi'(x^2) = 2xF(x) + 2xe^{x^2} \cdot \frac{(-e^{-x^2})}{x^2} = 2xF(x) - \frac{2}{x}.$$

La fonction F est donc bien une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

✍ *On aurait aussi pu appliquer le cours sur les intégrales à paramètre pour démontrer que* F *était de classe* $\mathscr{C}^1$ *et exprimer sa dérivée (Formule de Leibniz).*

3. On fixe $x > 0$ et on considère les deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies par :

$$\forall\, t \in I, \qquad u(t) = \frac{-e^{-xt}}{x} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{x+t}.$$

Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \qquad u'(t) = e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{-1}{(x+t)^2}.$$

On a déjà démontré que $u'v$ était intégrable sur I. Il est clair que uv tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Enfin uv' est continue sur I et $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$, donc uv' est aussi intégrable sur I.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt &= -u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in I$ et tout $x > 0$, il est clair que

$$0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{x(x+t)^2} \leqslant \frac{xe^{-xt}}{x^4}$$

et donc, en intégrant cet encadrement,

$$\forall\, x > 0, \quad \left| F(x) - \frac{1}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^4}.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

❧ La fonction $[u \mapsto 1/u]$ est continue et positive sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. Or

$$\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{u}$$

donc
$$\int_y^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{y\to 0}{\sim} \int_y^1 \frac{du}{u} = -\ln y.$$
Par composition de limites *(et pas par composition d'équivalents !)*, on en déduit que
$$\int_{x^2}^1 \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to 0}{=} \ln(x^2) = -2\ln x.$$

D'autre part, l'intégrale
$$K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$
est convergente (déjà vu !) et indépendante de x et le facteur e^{x^2} tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Finalement,
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} e^{x^2}\left[\big(-2\ln x + o(\ln x)\big) + K\right] \sim -2\ln x.$$

Solution 21

1. Tout d'abord, la fonction $f = \left[t \mapsto \sin(t^2)\right]$ est continue sur le segment $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, donc elle est intégrable sur ce segment et l'intégrale I_n est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|I_n| \leqslant \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \left|\sin(t^2)\right| dt$$
et
$$\forall\, t \in [\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}], \quad \left|\sin(t^2)\right| \leqslant 1,$$
donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n| \leqslant \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}.$$
Pour calculer un ordre de grandeur de $\sqrt{(n+1)\pi}$, on commence par **factoriser** : lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\sqrt{(n+1)\pi} = \sqrt{n\pi}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1/2} = \sqrt{n\pi}\Big(1+\frac{1}{2n}+o(1/n)\Big).$$
On en déduit que
$$\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
ce qui prouve bien que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2. Il ne s'agit pas de poser $u = t^2$, mais de poser $t = \sqrt{u}$, ce qui n'est pas tout à fait la même chose.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\varphi = \left[u \mapsto \sqrt{u}\right]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[n\pi, (n+1)\pi]$ sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$ et comme la fonction f est intégrable sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, on peut déduire du Théorème du changement de variable que la fonction
$$(f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \left[u \mapsto \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\right]$$
est intégrable sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$.

✍ *Cela n'a rien de remarquable :* toute *fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.*

En revanche, pour $n = 0$, l'application φ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi]$ sur $\left]0, \sqrt{\pi}\right]$ et la fonction $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ est intégrable sur l'intervalle $]0,\pi]$, ce qui est tout de même plus intéressant car, cette fois, le Théorème du changement de variable nous assure de la convergence d'une *intégrale généralisée* :
$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$
Quoi qu'il en soit,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$

3. Le changement de variable affine $v = u - n\pi$ permet d'écrire I_n comme une intégrale sur l'intervalle $[0,\pi]$ pour tout $n \geqslant 1$.
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(v+n\pi)}{\sqrt{v+n\pi}}\,dv = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\sqrt{v+n\pi}}\,dv$$

Comme $\sin v$ est positif pour tout $v \in [0, \pi]$, on en déduit que l'intégrale I_n est du signe de $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série $\sum I_n$ est une série alternée.

4. Pour tout $v \in [0, \pi]$ et pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$0 < \sqrt{v + n\pi} \leqslant \sqrt{v + (n+1)\pi}$$

et comme $\sin v \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + (n+1)\pi}} \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + n\pi}}.$$

Comme l'intégration avec bornes dans l'ordre croissant conserve les inégalités, on en déduit enfin que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant |I_{n+1}| \leqslant |I_n|.$$

Cela prouve que les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont remplies. La série $\sum I_n$ est donc convergente et sa somme est du signe de I_0, c'est-à-dire positive.

Solution 22

1. La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Lorsque t tend vers 0, il est clair que $f(t) \sim \ell n\, t$. Or ℓn est une fonction intégrable au voisinage droit de 0 (fonction de référence).

Lorsque t tend vers 1, on pose $t = 1 - h$. D'après le Théorème du changement de variable AFFINE, la fonction f est intégrable au voisinage (gauche) de 1 si, et seulement si, la fonction $[h \mapsto f(1-h)]$ est intégrable au voisinage (droit) de 0. Or

$$f(1-h) = \frac{\ell n(1-h)}{\sqrt{h^3}} \sim \frac{-h}{h^{3/2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

et la fonction $\left[h \mapsto h^{-1/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $h = 0$ (fonction de référence), donc f est bien intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est bien intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ell n\, t}{\sqrt{(1-t)^3}}\, dt$$

est (absolument) convergente.

2. La fonction $g = (t+2) - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{t^2 + 4t + 1} &= t\sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} \\
&= t\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{16}{t^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right] \\
&= (t+2) - \frac{3}{2t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$g(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{-3}{2t}$$

ce qui prouve que g n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ L'équivalent trouvé montre que la fonction g tend vers 0 par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est de signe constant (négative !) au voisinage de $+\infty$ et comme elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} (t+2) - \sqrt{t^2 + 4t + 1}\, dt$$

est divergente.

✍ *On aurait pu calculer le développement limité de manière plus siouX en réduisant le trinôme à la forme canonique. En effet,*

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2+4t+1} &= \sqrt{(t+2)^2-3}\\ &= (t+2)\sqrt{1-\frac{3}{(t+2)^2}}\\ &= (t+2)-\frac{3}{2(t+2)}+o\Big(\frac{1}{(t+2)}\Big)\end{aligned}$$

et on pouvait en déduire plus rapidement l'équivalent de $g(t)$ *qui permettait de conclure.*

Solution 23

1. La fonction

$$f = \Big[t \mapsto \frac{t-1}{\ell n\, t}\Big]$$

est évidemment continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0,

$$f(t) \sim \frac{-1}{\ell n\, t} \longrightarrow 0.$$

Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{(t-1)}{\ell n[1-(1-t)]} \sim \frac{(t-1)}{-(t-1)} \longrightarrow -1.$$

La fonction f admet donc un prolongement continu sur le segment $[0,1]$ (en posant $f(0)=0$ et $f(1)=-1$), donc elle est intégrable sur $]0,1[$.

✍ *Seul le prolongement de* f *est intégrable sur le segment* $[0,1]$, *car* f *elle-même* n'est pas définie *sur le segment* $[0,1]$, *mais seulement sur l'ouvert* $]0,1[$.

2. La fonction $\varphi = [x \mapsto t = e^{-x}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $]0,1[$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Comme $f(t)$ est intégrable sur $]0,1[$, le Théorème du changement de variable nous assure que

$$f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = \frac{e^{-x}-1}{\ell n(e^{-x})}\cdot(-e^{-x}) = \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$I = \int_{+\infty}^{0} f\circ\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

❧ Puisque la fonction

$$\Big[x \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\Big]$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$, on sait que

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Comme les deux fonctions

$$\Big[x\mapsto\frac{e^{-x}}{x}\Big] \quad\text{et}\quad \Big[x\mapsto\frac{e^{-2x}}{x}\Big]$$

sont intégrables sur $[\varepsilon,+\infty[$ (continues sur cet intervalle et $o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$), on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x}\,dx.$$

Le changement de variable AFFINE $y=2x$ dans la dernière intégrale nous donne :

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$,

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{x}.$$

En intégrant sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, on en déduit que

$$e^{-2\varepsilon}\ln 2 \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leqslant e^{-\varepsilon}\ln 2$$

et, par encadrement, que $I = \ln 2$.

Variante 1.

La fonction $[x \mapsto (e^{-x}-1)/x]$ est continue sur $]0,+\infty[$ et tend vers -1 au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \int_0^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx - \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0-0=0.$$

Par conséquent, en vertu de l'Astuce taupinale,

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \ln 2 + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln 2 + 0.$$

On prendra soin de ne jamais invoquer la linéarité pour des intégrales divergentes !

Variante 2.

La fonction $g = [x \mapsto e^{-x}/x]$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $g(x) \sim {}^1\!/_x$ au voisinage de 0. Comme la fonction $[x \mapsto {}^1\!/_x]$ est continue et positive mais pas intégrable au voisinage de 0, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon$$

(Théorème d'intégration des ordres de grandeurs, version divergente).

Mais cela nous conduit à

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \big[\ln 2\varepsilon - \ln\varepsilon + o(\ln\varepsilon)\big] = o(\ln\varepsilon),$$

ce qui ne nous permet pas de conclure !

Solution 24

Il est clair que la fonction définie par

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$$

est continue et négative sur l'intervalle $]0,1[$.

Lorsque x tend vers 0,

$$f(x) \sim \frac{-x^2}{x^2} \to -1,$$

ce qui prouve que f admet un prolongement continu sur $[0,1[$ et donc que f est intégrable au voisinage de 0.

Lorsque x tend vers 1, on effectue le changement de variable AFFINE $h = 1-x$. D'après le Théorème du changement de variable, $f(x)$ est intégrable au voisinage de $x=1$ si, et seulement si, $f(1-h)$ est intégrable au voisinage de $h=0$. Or

$$f(x) = f(1-h) = \frac{\ln(2h-h^2)}{(1-h)^2} = \frac{1}{(1-h)^2}\cdot\Big[\ln h + \ln 2 + \ln\Big(1-\frac{h}{2}\Big)\Big]$$

donc, lorsque h tend vers 0,

$$f(1-h) \sim \ln h.$$

Comme $\ln h$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), la fonction f est bien intégrable au voisinage de 1.

La fonction f est donc intégrable sur $]0,1[$. En particulier, l'intégrale généralisée de f sur $]0,1[$ est convergente et :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0\\ A \to 1}} \int_{\varepsilon}^{A} f(x)\,dx.$$

❧ Essayons d'intégrer par parties avec

$$u(x) = \ell n(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Lorsque x tend vers 0, le produit

$$u(x)v(x) = \frac{-\ell n(1-x^2)}{x}$$

est équivalent à $-(-x^2)/x = x$ et tend donc vers 0. Mais, lorsque x tend vers 1, ce produit tend vers $+\infty$... Cette intégration par parties est impossible.

❧ Que déduire du calcul précédent ? Pour que le produit $u(x)v(x)$ ait une limite finie lorsque x tend vers 1, il faut qu'il s'agisse d'une forme indéterminée et donc que $v(x)$ tende vers 0.

La seule possibilité pour intégrer par parties est donc :

$$u(x) = \ell n(1-x^2) \qquad v(x) = \frac{-1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall\, 0 < x < 1, \quad u(x)v(x) &= \frac{-(1-x)\,\ell n(1-x^2)}{x} \\ &= \frac{-(1-x)\,\ell n(1-x) + (1-x)\,\ell n(1+x)}{x}. \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers 0, on a encore $u(x)v(x) \sim x$ et lorsque x tend vers 1, cette fois, $u(x)v(x)$ tend vers 0 (les deux termes du numérateur tendent vers 0 et le dénominateur tend vers 1).

La Formule d'intégration par parties nous dit alors que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente et que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to 1} u(x)v(x) - \lim_{x\to 0} u(x)v(x) - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{2x(1-x)}{(1-x)(1+x)x}\,dx = -2\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -2\,\ell n\,2.$$

✍ *Le résultat trouvé est* négatif, *ce qui est cohérent avec notre remarque initiale sur le signe de* $f(x)$.

✍ *La Formule d'intégration par parties démontre seulement que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

est convergente, elle ne prouve pas à elle seule que le produit $u'(x)v(x)$ *est intégrable sur* $]0,1[$.

En fait, ce produit étant négatif (donc de signe constant*) et l'intégrale généralisée étant* convergente, *on peut conclure que* $u'v$ *est bien intégrable sur* $]0,1[$.

Mais, je le répète, cette propriété n'est pas une conséquence de la Formule d'intégration par parties toute seule !

Solution 25

On pose $I =]0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, t \in I, \quad f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}.$$

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur l'ouvert I.

Pour $n = 0$, la fonction f_n tend vers 2 au voisinage de $t = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1 + o(1)}{\sqrt{t} + o(\sqrt{t})} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc f_n est intégrable au voisinage de $t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $f_n(t) \sim {}^2/_{\sqrt{t}}$ au voisinage de $+\infty$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{t^n + o(t^n)}{t^{2n} + o(t^{2n})} \sim \frac{1}{t^n}.$$

Donc f_n est intégrable au voisinage de $t = +\infty$ si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

Bref : pour tout $n \geqslant 2$ (et seulement pour $n \geqslant 2$), la fonction f_n est intégrable sur I.

❧ Considérons la fonction f définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \left|\begin{array}{ll} {}^1/_{\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{array}\right.$$

La fonction f est continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Par ailleurs, elle admet une limite finie à gauche en $t = 1$ (limite égale à 1) et une limite finie à droite en $t = 1$ (limite nulle). Donc la fonction f est bien continue par morceaux sur I.

❧ Pour $0 < t < 1$, on sait que t^n et t^{2n} tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = f(t).$$

Pour $t = 1$, on a $f_n(t) = 1 = f(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, pour $t > 1$, on sait que t^n et t^{2n} tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t^n}{t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(t).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc simplement sur I vers la fonction f.

❧ Considérons la fonction g définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad g(t) = \left|\begin{array}{ll} {}^2/_{\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ {}^1/_{t^2} & \text{si } t > 1. \end{array}\right.$$

Cette fonction est évidemment continue sur les deux intervalles ouverts $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Par ailleurs, elle tend vers une limite finie à gauche en $t = 1$ (limite égale à 2) et vers une limite finie à droite en $t = 1$ (limite égale à 1). La fonction g est donc continue par morceaux sur I.

Par comparaison avec les fonctions de Riemann (au voisinage de $t = 0$ comme au voisinage de $t = +\infty$), la fonction g est intégrable sur l'intervalle I.

❧ Pour $0 < t \leqslant 1$, il est clair que

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1+1}{\sqrt{t} + 0} = g(t).$$

Pour $t > 1$ et $n \geqslant 2$, on a $0 < \sqrt{t} \leqslant t^n$ et donc

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1 + t^n}{t^n + t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^2} = g(t).$$

On a donc établi que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant g(t)$$

où le majorant est indépendant de n et intégrable sur I en tant que fonction de t.

La convergence est donc dominée. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

Solution 26

1. Les deux définitions de $f_n({}^1/_n)$ coïncident :

$$n\sqrt{n}\, \frac{1}{n} = \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{{}^1/_n}}$$

donc la fonction f_n est bien définie sur $[0,1]$.

❧ La fonction f_n est clairement continue sur $[0, {}^1\!/\!_n[$, ainsi que sur $]{}^1\!/\!_n, 1]$. De plus, elle est clairement continue à gauche en $x = {}^1\!/\!_n$ et continue à droite en $x = {}^1\!/\!_n$, donc elle est bien continue en $x = {}^1\!/\!_n$. Par conséquent, la fonction f_n est continue sur le segment $[0,1]$.

L'intégrale I_n existe donc bien en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

✍ *La fonction f_n est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles $[0, {}^1\!/\!_n[$ et $]{}^1\!/\!_n, 1]$. Elle est également dérivable à gauche et à droite en $x = {}^1\!/\!_n$, mais*

$$(f_n)'_g({}^1\!/\!_n) = n\sqrt{n} \quad \textit{tandis que} \quad (f_n)'_d({}^1\!/\!_n) = \left.\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right|_{x={}^1\!/\!_n} = \frac{-n\sqrt{n}}{2},$$

donc f_n n'est pas dérivable en $x = {}^1\!/\!_n$.

❧ Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si $0 < x \leqslant 1$, alors il existe un entier $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad x \geqslant \frac{1}{n_0} \geqslant \frac{1}{n}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0, \\ {}^1\!/\!_{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

✍ *La fonction f est continue sur $]0,1]$, mais elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, car elle n'a pas de limite à droite finie au voisinage de 0 (elle tend vers $+\infty$).*

❧ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, la limite f de cette suite serait également continue sur $[0,1]$, ce qui est faux comme on vient de le constater.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. On peut calculer explicitement I_n : pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = n\sqrt{n}\,\frac{({}^1\!/\!_n)^2}{2} + 2\big(\sqrt{1} - \sqrt{{}^1\!/\!_n}\big) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

❧ Sinon, on peut remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n({}^1\!/\!_n) = \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

et que

$$\forall\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x).$$

Or la fonction f est une fonction intégrable de référence sur $]0,1]$, donc la convergence est dominée !

Par conséquent,

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = 2\big[\sqrt{1} - \sqrt{0}\big] = 2.$$

✍ *La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ et a* fortiori *n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Cependant, elle est bien continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$: c'est même, comme on l'a dit, une fonction de référence !*

Cette remarque en passant pour indiquer que la théorie de l'intégration qui est au programme est trop simplifiée pour ne pas présenter quelques bizarreries...

Solution 27

1. Les réels

$$x = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

vérifient l'équation du cercle trigonométrique :

$$x^2 + y^2 = 1$$

donc (forme faible du Théorème de relèvement) il existe un réel φ_n tel que

$$x = \cos\varphi_n \quad \text{et} \quad y = -\sin\varphi_n$$

si bien que

$$x\cos nt + y\sin nt = \cos(nt + \varphi_n).$$

2. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_n &= (a_n^2 + b_n^2)\int_c^d \cos^2(nt + \varphi_n)\,dt \\ &= (a_n^2 + b_n^2)\int_c^d \frac{1 + \cos(2nt + 2\varphi_n)}{2}\,dt \\ &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\cdot\left[(d - c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Mais l'intégrale

$$\int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt = \left[\frac{\sin(2nt + 2\varphi_n)}{2n}\right]_c^d$$

tend vers 0 (le numérateur est borné et le dénominateur tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$), donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(d - c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right] = (d - c) > 0.$$

Autrement dit,

$$\left[(d - c) + \int_c^d \cos(2nt + 2\varphi_n)\,dt\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} (d - c)$$

et par conséquent

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [c, d], \quad f_n(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt.$$

Chaque fonction f_n est intégrable sur $[c, d]$ (fonction continue sur un segment).

Par hypothèse, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[c, d]$ vers la fonction nulle (qui est une fonction continue sur $[c, d]$...).

Enfin, la convergence est dominée : en effet, comme les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \|a\|_\infty \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \|b\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [c, d], \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Le majorant trouvé est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et intégrable sur $[c, d]$ en fonction de t (en tant que fonction constante sur un segment).

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_c^d f_n(t)\,dt = \int_c^d 0\,dt = 0.$$

❧ On déduit alors de la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 + b_n^2 = 0$$

(puisque $(d-c) > 0$) et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$$

(par composition de limites).

Et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

on déduit du Théorème d'encadrement que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Solution 28

Tout d'abord, la série de Poisson $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toute sous-famille d'une famille sommable étant elle-même sommable, on en déduit que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait (cours sur la fonction Γ) que $[x \mapsto x^n e^{-x}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = 1.$$

Par linéarité de l'intégrale (puisque I est un ensemble **fini**, il est permis d'invoquer la linéarité !), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!}\, dx = \sum_{n\in I} 1 = \#(I).$$

Or $I \subset A$ et le terme général est positif, donc

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \sum_{n\in I} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leqslant e^{-x} f(x)$$

et par hypothèse, la fonction $[x \mapsto e^{-x} f(x)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que

$$\#(I) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx.$$

Le majorant ne dépendant pas de I, on peut en conclure que la partie A est finie.

✍ *Par définition, le cardinal d'une partie A est infini si, et seulement si, on peut extraire de A une partie finie de cardinal arbitrairement grand.*

2. Puisque A est un ensemble fini d'indices, la fonction f est en fait polynomiale. Par conséquent, l'équivalent proposé est impossible !

Solution 29

Transformons l'intégrale avec le changement de variable linéaire $u = nx$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\, du.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_n(u) = \frac{f(u/n)}{1+u^2}.$$

❧ **Intégrabilité** — Comme f est continue et bornée, chaque fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\varphi_n(u) = \mathcal{O}(1/u^2)$ lorsque u tend vers $+\infty$, donc chaque fonction φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

❧ **Convergence simple** — Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0. Par composition de limites, on en déduit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$\varphi = \left[u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}\right].$$

❧ **Domination** — Par ailleurs, comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \geqslant 0, \quad |\varphi_n(u)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2}.$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la convergence est dominée.

On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_n(u)\,du=\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,du=f(0)\big[\operatorname{Arctan}u\big]_0^{+\infty}$$
et donc que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot f(0).$$

Solution 30

Tout d'abord, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

❧ Pour $x>0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisqu'on étudie $x\to+\infty$), on peut effectuer le changement de variable linéaire $u=tx$:
$$xF(x)=\int_0^{xa}g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\,du.$$

❧ On considère donc la fonction φ définie par
$$\forall\,0\leqslant u\leqslant xa,\quad \varphi(x,u)=g\Big(\frac{u}{x}\Big)e^{-u}\quad\text{et}\quad\forall\,u>xa,\quad\varphi(x,u)=0.$$

▶ **Intégrabilité** — On a déjà justifié que, pour tout $x>0$, la fonction
$$[u\mapsto\varphi(x,u)]$$
était intégrable sur $I=[0,+\infty[$ et que
$$\int_0^{+\infty}\varphi(x,u)\,du=xF(x).$$

▶ **Convergence simple** — Comme g est continue en 0,
$$\forall\,u\in I,\quad\lim_{x\to+\infty}\varphi(x,u)=g(0)e^{-u}$$
et la fonction $[u\mapsto g(0)e^{-u}]$ est continue sur I (et bien entendu intégrable sur cet intervalle).

▶ **Domination** — Comme g est continue sur le compact $[0,a]$, elle est bornée. Par conséquent,
$$\forall\,u\in I,\ \forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad\big|\varphi(x,u)\big|\leqslant\|g\|_\infty\,e^{-u}.$$

La majorant trouvé est indépendant de $x>0$ et intégrable sur I en tant que fonction de u.

Par conséquent, d'après le Théorème de convergence dominée,
$$\lim_{x\to+\infty}\int_I\varphi(x,u)\,du=\int_I g(0)e^{-u}\,du=g(0).$$

Comme $g(0)\neq0$, on peut en déduire que
$$F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{g(0)}{x}.$$

✍ *Si $g(0)=0$, on a seulement démontré que $F(x)=o(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on n'a pas trouvé d'équivalent.*

Solution 31

Il est clair que la fonction $f=[t\mapsto 1-t\operatorname{Arctan}1/t]$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Comme la fonction Arctan tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, la fonction f tend vers 1 au voisinage de $t=0$. Admettant une limite finie au voisinage de 0, elle est donc intégrable au voisinage de 0.

D'autre part, d'après le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction Arctan,
$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\underset{t\to+\infty}{=}\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}+o\Big(\frac{1}{t^3}\Big)$$
donc
$$f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3t^2},$$

ce qui prouve que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui prouve que l'intégrale généralisée est bien définie ("convergente", comme on dit).

❧ On connaît l'identité classique :

$$\forall\, t>0,\quad \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} t. \tag{$\star$}$$

On en déduit que

$$\forall\, t>0,\quad f(t)=1-\frac{\pi}{2}\,t+t\operatorname{Arctan} t.$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int t\operatorname{Arctan} t\,dt &= \frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan} t-\int\frac{t^2}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\\ &= \frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan} t-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= \frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan} t-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\,\operatorname{Arctan} t\end{aligned}$$

donc une primitive de f est

$$F(t)=\frac{t}{2}-\frac{\pi t^2}{4}+\frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan} t+\frac{1}{2}\,\operatorname{Arctan} t.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(0)=\lim_{t\to+\infty}F(t).$$

Avec l'identité $(\star)$ rappelée plus haut,

$$\begin{aligned}\frac{t}{2}-\frac{\pi t^2}{4}+\frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan} t &= \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\,\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\\ &= \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\left[\frac{1}{t}+o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\right]=o(1)\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

Solution 32

1. La fonction $[x\mapsto \ell n\sin x]$ est continue sur l'intervalle $]0,\pi/2]$ et

$$\ell n\sin x-\ell n\, x=\ell n\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}\ell n\,1=0$$

(par composition de limites), donc

$$\ell n\sin x=\ell n\, x+o(\ell n\, x)\sim \ell n\, x.$$

Comme ℓn est une fonction intégrable de référence au voisinage de 0, on en déduit que $\ell n\sin x$ est intégrable sur $]0,\pi/2]$.

❧ On considère maintenant le changement de variable affine $u=\frac{\pi}{2}-x$ qui réalise une bijection de $[0,\pi/2[$ sur $]0,\pi/2]$: d'après le Théorème de changement de variable, la fonction $[x\mapsto \ell n\cos x]$ est intégrable sur $[0,\pi/2[$ si, et seulement si, la fonction $[u\mapsto \ell n\cos(\pi/2-u)]$ est intégrable sur $]0,\pi/2]$. Or

$$\forall\, 0<u\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \ell n\cos\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)=\ell n\sin u$$

et on a déjà démontré que $\ell n\sin u$ était intégrable sur $]0,\pi/2]$.

2. Les intégrales I et J sont donc bien définies. De plus, d'après le Théorème du changement de variable,

$$J=\int_0^{\pi/2}\ell n\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}\ell n\sin u\,du=I.$$

3. Par linéarité,

$$I+J=\int_0^{\pi/2}\ell n(\sin x\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ell n\frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

donc
$$2I = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx.$$
Avec le changement de variable affine $u = 2x$, qui réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, \pi[$, on a
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x)\,(2\,dx) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du.$$
La fonction $[u \mapsto \ln \sin u]$ est intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ (conséquence du changement de variable précédent !) et admet $u = \pi/2$ pour axe de symétrie :
$$\forall\, 0 < u < \pi, \qquad \ln \sin(\pi - u) = \ln \sin u.$$
Par conséquent,
$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = I.$$
✍ *C'est une variante du théorème bien connu : si f est paire et intégrable sur $]-\alpha, \alpha[$, alors*
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 2 \int_0^{\alpha} f(t)\,dt.$$

❧ Finalement,
$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$
✍ *Puisque $0 < \sin u \leqslant 1$ pour $0 < u \leqslant \pi/2$, on intègre une fonction négative avec des bornes rangées dans l'ordre croissant, donc on savait dès le début que l'intégrale était négative.*

Solution 33

1. Pour tout entier $p \geqslant 1$,
$$n^p.v_n = \exp(-\sqrt{n} + p \ln n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
par croissance comparée ($\ln n \ll \sqrt{n}$). Ainsi, le terme général v_n est négligeable devant le terme générale de n'importe quelle série de Riemann convergente, ce qui prouve que la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

✍ *Un développement limité simple montre que*
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
et donc que v_{n+1}/v_n tend vers 1 : il est donc impossible de prouver que la série $\sum v_n$ converge à l'aide de la règle de D'Alembert.

2. La fonction $\left[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}\right]$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, comme on l'a vu,
$$e^{-\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^p}\right)$$
quel que soit l'entier $p > 1$. Par conséquent, cette fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❧ Par intégration par parties,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x ue^{-u}\,du = 1 - (1+x)e^{-x}$$
et par passage à la limite :
$$\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = 1.$$
❧ Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (avec $dt = 2u\,du$) nous donne
$$I_n = 2 \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} ue^{-u}\,du.$$

Avec la relation de Chasles, on en déduit que

$$I_n = 2\left(1 - \int_0^{\sqrt{n}} ue^{-u}\, du\right) = 2(\sqrt{n}+1)e^{-\sqrt{n}}.$$

3. La fonction $\left[t \mapsto e^{-\sqrt{t}}\right]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, t \in [k, k+1], \qquad e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant e^{-\sqrt{t}} \leqslant e^{-\sqrt{k}}$$

donc

$$e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}}\, dt \leqslant e^{-\sqrt{k}}.$$

On a démontré que la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ était convergente, tout comme l'intégrale généralisée $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, dt$. On peut donc sommer l'encadrement précédent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k+1}} \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\, dt = I_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} = R_{n-1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n.$$

❧ D'après l'expression calculée ci-dessus,

$$I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

4. Avec le développement limité à l'ordre deux de $\ell n(1+h)$, on trouve que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{v_k}{\sqrt{e}}.$$

Or $\sum v_k$ est une série convergente de terme général positif, donc la série $\sum u_k$ est (absolument) convergente et

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{\sqrt{e}} = \frac{R_n}{\sqrt{e}}$$

d'après le Théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 34

1. Il est clair que l'application S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad S'(x) = -xe^{-x} < 0.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad 0 < S(x) \leqslant S(1) = 2e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \geqslant 1, \forall\, n \geqslant 2, \quad 0 < [S(x)]^n \leqslant [S(x)]^{n-1}.S(x) \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(x).$$

2. La fonction intégrande est le produit d'une application polynomiale par e^{-t}, donc elle est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n-1} e^{-t} = \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\right]^n = \left[S(t/n)\right]^n \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(t/n).$$

Le changement de variable affine $u = t/n$ montre que

$$\int_n^{+\infty} S(t/n)\, dt = n\int_1^{+\infty} S(u)\, du$$

(où l'intégrale est un réel positif, puisque S est une fonction intégrable et positive). Par conséquent,

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} e^{-t}\, dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} S(t/n)\, dt$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} \cdot n \int_{1}^{+\infty} S(u)\, du$$

et comme $0 < 2/e < 1$, on en déduit par croissances comparées (de $\sqrt{n}$, n et q^n) que le majorant tend vers 0.

On a démontré par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} e^{-t}\, dt = 0$$

(et on n'a pas encore compris ce que venait faire ici ce facteur $1/\sqrt{n}$).

3. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cdot f_4(t)\, dt$$

où

$$\forall\, t > -1, \quad f_4(t) = \frac{d^4}{dt^4} \ell n(1+t) = \frac{-6}{(1+t)^4} < 0.$$

On en déduit que l'intégrale est négative pour tout $x > -1$ (en discutant sur le signe de x pour tenir compte de l'ordre des bornes de cette intégrale) et donc que

$$\forall\, x > -1, \quad \ell n(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. On devine qu'il s'agit d'appliquer le Théorème de convergence dominée : nous allons définir une suite de fonctions avec un peu d'astuce, afin de considérer une suite d'intégrales pour lesquelles l'intervalle d'intégration est toujours le même (= indépendant de n).

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n} e^{-\sqrt{n}x} \times \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},\sqrt{n}]}(x).$$

Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit d'une fonction continue [polynomiale !] par l'indicatrice d'un intervalle) et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car nulle au voisinage de $\pm\infty$) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^{n} e^{-\sqrt{n}x}\, dx.$$

❧ On vérifie sans peine que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction célèbre.

D'une part,

$$\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n} e^{-\sqrt{n}x} = \exp\Big[-\sqrt{n}x + n\,\ell n\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big]$$
$$= \exp\Big[-\sqrt{n}x + \sqrt{n}x - \frac{x^2}{2} + o(1)\Big]$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-x^2/2)$$

et d'autre part, comme $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n} e^{-\sqrt{n}x}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \exp(-x^2/2).$$

❧ Il reste à vérifier la condition de domination. *Ouvrez grand les yeux !*

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente,

$$\forall\, x > -\sqrt{n}, \qquad n\,\ell n\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \sqrt{n}t - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\sqrt{n}}$$

et donc
$$\forall\, x > -\sqrt{n}, \qquad 0 < \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\cdot\exp\Big(\frac{x^3}{3\sqrt{n}}\Big).$$
En particulier,
$$\forall\, x \in \left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right], \qquad 0 < \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x} \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{2}\Big)\cdot\exp\Big(\frac{x^2}{3}\Big)$$
puisque
$$\forall\, |x| \leqslant \sqrt{n}, \qquad \frac{|x|^3}{3\sqrt{n}} \leqslant \frac{x^2}{3}.$$
Comme f_n est identiquement nulle hors de l'intervalle $\left]-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right]$, on en déduit que
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \exp\Big(\frac{-x^2}{6}\Big).$$
On a trouvé un majorant indépendant de n et, en tant que fonction de x, intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la condition de domination est remplie.

❧ D'après le Théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

5. On effectue, comme le suggère l'énoncé, le changement de variable affine $t = n + \sqrt{n}u$ dans l'intégrale I_n :
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n+\sqrt{n}u)^n e^{-n-\sqrt{n}u}\,du \\ &= \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du. \end{aligned}$$
Or $I_n = n!$ et d'après la Formule de Stirling,
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\cdot\frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}}.$$
On en déduit, par unicité de la limite, que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du = \sqrt{2\pi}.$$

❧ D'après la relation de Chasles,
$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du &= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du \\ &\quad + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du. \end{aligned}$$
Avec le changement de variable $t = \sqrt{n}u$ dans la dernière intégrale, on obtient
$$\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{n}^{+\infty} \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-t}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$
d'après **[2]**. Ainsi, d'après **[4]**,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Big(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\sqrt{n}u}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$
Par unicité de la limite,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$