Composition de Mathématiques

Le 27 novembre 2024 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère une fonction

$$g \,:\, \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

continue et bornée. On notera comme d'habitude

$$\|g\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \big|g(t)\big|.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction

$$f \,:\, \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^x g(x-u)e^u \,du.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$I_g = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\,dt$$

est convergente.

3. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^x g(t)e^{-t+x}\,dt.$$

3. b. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est la solution du problème de Cauchy suivant.

$$y(0) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad y'(x) - y(x) = g(x)$$

4. On suppose que $I_g \neq 0$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On suppose que $I_g = 0$.

5. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\,dt.$$

5. b. En déduire que f est bornée au voisinage de $+\infty$.

5. c. Existe-t-il d'autres solutions de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad y'(x) - y(x) = g(x) \tag{E}$$

qui sont bornées sur $\mathbb{R}_+$?

5. d. On suppose de plus que $g(t)$ tend vers un réel ℓ lorsque t tend vers $+\infty$. Démontrer que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

❖ II – Problème ❖

On considère l'intervalle $\Omega =]-1, +\infty[$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction u_k définie par

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad u_k(x) = \frac{1}{(k+x+1)\sqrt{k+x}}.$$

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction U définie par

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad U(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

Cette fonction U apparaît dans l'étude d'une spirale, appelée aussi escargot de Pythagore et attribuée à Théodore de Cyrène (un contemporain de Socrate).

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur Ω.

Partie A. Étude asymptotique de U

2. Dans cette question, on pose

$$\forall\, x \in \Omega, \quad U_2(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(x).$$

2. a. Démontrer que la fonction U_2 est bornée sur Ω.

2. b. En déduire que

$$U(x) \underset{x \to -1}{=} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathcal{O}(1).$$

3. On pose $I = [0, +\infty[$ et, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times I$, on pose

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x+t}(x+t+1)}.$$

3. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur I.

L'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

est donc convergente pour tout $x > 0$.

3. b. Démontrer que

$$U(x) \underset{x \to +\infty}{=} F(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big).$$

3. c. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
☞ *On effectuera un changement de variable judicieusement choisi et soigneusement justifié.*

3. d. En déduire que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big)$$

puis que

$$U(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Partie B. Régularité de U

On considère la fonction g définie par

$$\forall\, t > 0, \qquad g(u) = \frac{e^u}{\sqrt{u}}$$

et la fonction G définie par

$$\forall\, t > 0, \quad G(t) = \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\,du.$$

4. Démontrer que la fonction g est intégrable sur l'intervalle $]0, t]$ pour tout $t > 0$.

5. Démontrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser sa dérivée.

6. Démontrer qu'on peut prolonger G en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

7. Calculer un équivalent de $G(t)$ pour t voisin de 0.

8. Démontrer que G tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad t^n \underset{t \to +\infty}{=} o\big(G(t)\big)$$

mais que

$$G(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(e^t).$$

9. Étudier la convexité de G.

10. Soit $\alpha > 1$.

10. a. Démontrer que l'application $h_\alpha = [t \mapsto e^{-\alpha t} G(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

10. b. En admettant que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi},$$

démontrer que

$$\int_0^{+\infty} h_\alpha(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha - 1}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-(x+1)t} G(t)}{e^t - 1}.$$

11. a. Déduire de la question précédente une expression intégrale de $u_k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \Omega$.

11. b. Démontrer que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x,t)]$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

11. c. Démontrer que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad U(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,dt.$$

11. d. En déduire que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^2$ et exprimer $U'(x)$ et $U''(x)$ sous forme intégrale.

12. Déduire de l'étude précédente l'allure du graphe de la fonction U.

Partie C. Approximation de $U(0)$

> *L'objectif de cette partie est de calculer une valeur approchée de $U(0)$ à l'aide de la formule sommatoire d'Euler–Maclaurin. Pour cela, on définit dans un premier temps la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **polynômes de Bernoulli** et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Bernoulli.*
> *On identifiera les polynômes $B_n \in \mathbb{R}[X]$ aux applications polynomiales $B_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.*

13. On pose $B_0 = 1$ et, pour un entier $n \geqslant 1$, on suppose connu un polynôme B_{n-1}. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme B_n tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \qquad \text{et que} \qquad \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0. \tag{$\star$}$$

> *Les polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ainsi définis par récurrence.*

14. Expliciter les polynômes B_1, B_2 et B_3.

> *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose*
> $$\|B_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \big|B_n(x)\big|.$$

15. Démontrer que le réel $\|B_n\|_\infty$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> *Les **coefficients de Bernoulli** sont définis par $b_n = B_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admettra que*
> $$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{-1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0.$$

16. Démontrer que $b_n = B_n(1)$ pour tout $n \geqslant 2$.

17. Dans cette question, on note $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

17. a. Démontrer que
$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 B_1(x)f'(x)\,dx.$$

17. b. Démontrer plus généralement que, pour tout entier $d \geqslant 2$,

$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\big[f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)\big] + (-1)^{d+1}\int_0^1 \frac{B_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant*
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor).$$

18. Démontrer que P_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \big|P_n(x)\big| \leqslant \|B_n\|_\infty.$$

19. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

19. a. Démontrer que, quels que soient les entiers $d \geqslant 2$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{\ell=m}^{m+n} f(\ell) = \frac{f(m)+f(m+n)}{2} + \int_m^{m+n} f(t)\,dt + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\big[f^{(k-1)}(m+n) - f^{(k-1)}(m)\big] + (-1)^{d+1}\int_m^{m+n} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

19. b. On suppose de plus que la fonction f est décroissante et intégrable au voisinage de $+\infty$ et que ses dérivées f', f'', …, $f^{(d-1)}$ tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$. Démontrer que

$$\sum_{\ell=m}^{+\infty} f(\ell) = \frac{f(m)}{2} + \int_m^{+\infty} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{d-1} \frac{(-1)^k b_{k+1} f^{(k)}(m)}{(k+1)!} + (-1)^{d+1}\int_m^{+\infty} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt. \tag{$\star\star$}$$

19. c. On suppose de plus que $f^{(d)}$ est de signe constant. Proposer un encadrement simple de l'intégrale généralisée

$$\int_m^{+\infty} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

On déduit de $(\star\star)$ *que*

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} f(\ell) = \sum_{\ell=0}^{m-1} f(\ell) + \frac{f(m)}{2} + \int_m^{+\infty} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{d-1} \frac{(-1)^k b_{k+1} f^{(k)}(m)}{(k+1)!} + (-1)^{d+1} \int_m^{+\infty} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

Si on sait calculer l'intégrale généralisée

$$\int_m^{+\infty} f(t)\,dt,$$

on peut en déduire une valeur approchée de la somme

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} f(\ell)$$

en commettant une erreur égale à

$$\varepsilon_{d,m} = \int_m^{+\infty} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

En appliquant ce qui précède à la fonction définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}(x+2)},$$

on a

$$\int_m^{+\infty} f(t)\,dt = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{m+1}}.$$

Pour $d = 3$ *et* $m = 4$*, sachant que* $\|B_3\|_\infty \leqslant 5.10^{-2}$*, on peut démontrer que* $|\varepsilon_{3,4}| \leqslant 10^{-3}$*. On obtient ainsi une valeur approchée à* 10^{-3} *près :*

$$U(0) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} f(\ell) \approx \sum_{\ell=0}^{3} f(\ell) + \frac{f(4)}{2} + 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{12} f'(4) \approx 1,8600$$

(en tenant compte du fait que $b_3 = 0$*) au moyen d'un relativement petit nombre de termes à calculer.*

❦ *Avec*

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2},$$

on a

$$\int_m^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{m+1}, \quad f'(m) = \frac{-1}{(m+1)^3} \quad \text{et} \quad |\varepsilon_{3,m}| \leqslant \frac{\|B_3\|_\infty}{6} \cdot \left|f''(m)\right| \leqslant 10^{-2} \cdot \frac{6}{(m+1)^4}.$$

Pour $m = 4$*, on a donc* $\varepsilon_{3,4} \leqslant 10^{-4}$ *et (avec* $b_2 = 1/6$ *et* $b_3 = 0$ *comme précédemment)*

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} f(\ell) + \frac{f(m)}{2} + \frac{1}{m+1} - \frac{f'(m)}{12} = 1.64494444444\ldots \quad \text{tandis que} \quad \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668482264\ldots$$

Solution I ❀ Solution bornée d'une équation différentielle du premier ordre

1. Pour $0 \leqslant u \leqslant x$, la différence $(x-u)$ appartient à $[0,x] \subset \mathbb{R}_+$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$[u \mapsto g(x-u)e^u]$$

est continue sur le segment $[0,x]$, donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

2. La fonction intégrande

$$\big[t \mapsto e^{-t}g(t)\big]$$

est le produit de la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction intégrable de référence), et de g, fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ (par hypothèse), donc la fonction intégrande est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et, par conséquent, l'intégrale généralisée I_g est convergente.

3. a. On effectue le changement de variable $t = x-u$, qui réalise une bijection affine (décroissante) du segment $[0,x]$ sur lui-même, avec $dt = -\,du$.

3. b. D'après **[3.a.]**,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^x \int_0^x g(t)e^{-t}\,dt.$$

La fonction $[t \mapsto g(t)e^{-t}]$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc la fonction G définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad G(x) = \int_0^x g(t)e^{-t}\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad G'(x) = g(x)e^{-x}$$

(Théorème fondamental). Par produit, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) &= e^x G(x) + e^x G'(x)\\ &= f(x) + e^x \cdot e^{-x} g(x)\end{aligned}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) - f(x) = g(x).$$

Par ailleurs, il est clair que $f(0) = 0$.

4. Par définition des intégrales généralisées convergentes,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}g(t)\,dt = I_g$$

et comme $I_g \neq 0$, on en déduit de **[3.a.]** que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} I_g e^x.$$

5. a. Comme l'intégrale généralisée I_g est convergente, on peut appliquer la relation de Chasles :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad I_g = \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt + \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)\,dt$$

et comme $I_g = 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x e^{-t}g(t)\,dt = -\int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)\,dt.$$

L'expression du **[3.a.]** devient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)\,dt.$$

5. b. Comme g est bornée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \big|e^{-t}g(t)\big| \leqslant e^{-t}\|g\|_\infty.$$

Comme l'intégration conserve les inégalités,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_x^{+\infty} \big|e^{-t}g(t)\big|\,dt &\leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}\|g\|_\infty\,dt\\ &\leqslant \|g\|_\infty\, e^{-x}\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \big|f(x)\big| &= \left| -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)\,dt\right|\\ &\leqslant e^x \int_x^{+\infty} \big|e^{-t}g(t)\big|\,dt\\ &\leqslant \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Le majorant trouvé ne dépend pas de x, ce qui prouve que la fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. c. Si φ est une solution de l'équation différentielle (E), alors (principe de superposition pour une équation différentielle linéaire) la différence $\varphi - f$ est solution de l'équation homogène

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad y'(x) - y(x) = 0. \tag{H}$$

Il existe donc une constante A telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) - f(x) = Ae^x.$$

On sait que la fonction f est bornée **[5.b.]** sur $\mathbb{R}_+$. Si la fonction φ est bornée au voisinage de $+\infty$ elle aussi, alors la différence $\varphi - f$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et la seule possibilité est alors : $A = 0$.

Autrement dit : la fonction f est la seule solution de l'équation différentielle (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

5. d. Commençons par remarquer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \ell = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\ell\,dt.$$

D'après **[5.a.]**, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) - \ell = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\big[g(t) - \ell\big]\,dt$$

et donc (inégalité triangulaire intégrale à nouveau)

$$\big|f(x) - \ell\big| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\big|g(t) - \ell\big|\,dt.$$

Comme $g(t)$ tend vers ℓ lorsque t tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$e^{-t}\big|g(t) - \ell\big| \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t}).$$

Or la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est positive et intégrable au voisinage de $+\infty$, donc

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}|g(t)-\ell|\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\right) = o(e^{-x})$$

(Théorème d'intégration des relations de comparaison).

On en déduit que

$$|f(x)-\ell| \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\big(e^x \times o(e^{-x})\big) = o(1).$$

Autrement dit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\ell = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Solution II ❀ Spirale de Théodore

1. Pour tout $x > -1$, il est clair que

$$u_k(x) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

et comme la série de Riemann $\sum 1/k^{3/2}$ est absolument convergente, on en déduit que la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente (et donc convergente, puisque c'est une série numérique).

Autrement dit : la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur Ω.

Partie A. Étude asymptotique de U

2. a. D'après **[1.]**, la somme $U_2(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega$. Comme $k \geqslant 2$, le même raisonnement montre que la série $\sum u_k(-1)$ converge elle aussi.

> *La fonction u_1 n'est pas définie en $x=-1$, c'est la raison pour laquelle $U(x)$ n'est définie que pour $x > -1$.*

❧ Il est clair que les fonctions u_k sont toutes décroissantes et positives sur Ω et si $k \geqslant 2$, elles sont mêmes décroissantes sur $]-2,+\infty[$. Par conséquent,

$$\forall\, k \geqslant 2,\ \forall\, x \in \Omega,\quad 0 \leqslant u_k(x) \leqslant u_k(-1).$$

En sommant les encadrements (pour $k \geqslant 2$!), on obtient

$$\forall\, x \in \Omega,\quad 0 \leqslant U_2(x) \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(-1).$$

Le majorant est un réel indépendant de x, donc la fonction U_2 est bornée sur Ω.

2. b. Pour tout $x \in \Omega$,

$$U(x) = u_1(x) + U_2(x)$$

D'après **[2.a.]**,

$$U_2(x) \underset{x\to-1}{=} \mathcal{O}(1)$$

et, par définition,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{[1+(x+1)]\sqrt{x+1}} \\ &\underset{x\to-1}{=} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\big(1-(x+1)+o(x+1)\big) \\ &\underset{x\to-1}{=} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathcal{O}(\sqrt{x+1}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} U(x) &\underset{x\to-1}{=} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathcal{O}(\sqrt{x+1})\right] + \mathcal{O}(1) \\ &\underset{x\to-1}{=} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Il est clair que la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

> *Comme $x > 0$, la somme $x+t$ est strictement positive, même si $t = 0$.*

De plus,

$$f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}}$$

et on sait que la fonction $[t \mapsto 1/t^{3/2}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (règle de Riemann). Par comparaison, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

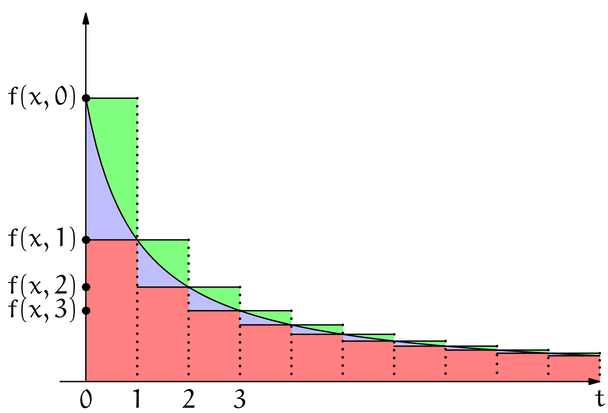
La fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est donc intégrable sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3. b. Pour tout $x > 0$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\quad u_k(x) = f(x,k).$$

Comme la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que la série $\sum u_k(x)$ est convergente, on peut comparer la somme de la série et l'intégrale généralisée.

> *Une figure est bienvenue !*



Pour tout $x > 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt \leqslant f(x,0) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad U(x) \leqslant F(x) \leqslant U(x) + \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

Comme

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

on en déduit que

$$U(x) \underset{x\to+\infty}{=} F(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big).$$

3. c. Soit $x > 0$. On commence par remarquer que

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x+t}(1+[\sqrt{x+t}]^2)} = \frac{1}{2\sqrt{x+t}} \cdot \psi\big(\sqrt{x+t}\big)$$

avec

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \psi(u) = \frac{2}{1+u^2}.$$

❧ Il est clair que l'application

$$\big[t \mapsto u = \sqrt{x+t}\big]$$

est une bijection (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[0,+\infty[$ sur l'intervalle $\big[\sqrt{x},+\infty\big[$ avec

$$du = \frac{dt}{2\sqrt{x+t}}.$$

❧ Comme l'application $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on déduit du théorème de changement de variable que la fonction ψ est intégrable sur $\big[\sqrt{x},+\infty\big[$ (ce qui n'est pas une surprise !) et que

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \psi(u)\, du = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\sqrt{x}\Big).$$

On sait bien que

$$\forall\, x > 0, \qquad \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x,$$

donc

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. d. On connaît le développement limité de la fonction Arctan au voisinage de $u = 0$:

$$\operatorname{Arctan} u \underset{u\to 0}{=} u + \mathcal{O}(u^3).$$

On déduit de **[3.c.]** que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big).$$

puis de **[3.b.]** que

$$U(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big).$$

Partie B. Régularité de U

4. La fonction g est clairement continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0,t]$. De plus,

$$g(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$$

et (règle de Riemann) la fonction $\big[u \mapsto 1/u^{1/2}\big]$ est intégrable au voisinage de 0. Par comparaison, la fonction g est aussi intégrable au voisinage de 0 et donc intégrable sur $]0,t]$ pour tout $t > 0$.

5. La fonction g est continue sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle. De plus, comme g est intégrable au voisinage de 0, la fonction G est la primitive de g qui tend vers 0 au voisinage de 0 (généralisation du Théorème fondamental).

La fonction G est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, t > 0, \qquad G'(t) = g(t) = \frac{e^t}{\sqrt{t}}.$$

6. Puisque g est intégrable au voisinage de 0,

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{u}}\, du = 0$$

(reste d'une intégrale convergente). On en déduit qu'en posant

$$G(0) = 0,$$

on prolonge G en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

> *Comme $G' = g$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, le Théorème des accroissements finis nous assure que ce prolongement continu de G n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale).*
> *Cela sera confirmé à la question suivante.*

7. On a déjà remarqué que

$$g(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

La fonction $[u \mapsto {}^1\!/\!\sqrt{u}]$ est une fonction positive et intégrable au voisinage de 0, donc (intégration des relations de comparaison)

$$G(t) \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{t}.$$

8. Comme elle tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, la fonction g n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ et comme elle est positive,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t g(u)\, du = +\infty.$$

La fonction G tend donc vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

❧ Par ailleurs, il est clair que

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot e^u \underset{u\to+\infty}{=} o(e^u).$$

Or la fonction exp est positive et n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, donc (intégration des relations de comparaison)

$$\int_0^t g(u)\, du \underset{t\to+\infty}{=} o\Big(\int_0^t e^u\, du\Big)$$

c'est-à-dire
$$G(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t).$$

❧ De la même manière, il est clair que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n \underset{u\to+\infty}{=} o\big(g(u)\big).$$

Comme la fonction g est positive et n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on déduit à nouveau du Théorème d'intégration des relations de comparaison que
$$\frac{t^{n+1}}{n+1} = \int_0^t u^n\,du \underset{t\to+\infty}{=} o\big(G(t)\big)$$
et donc que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad t^{n+1} \underset{t\to+\infty}{=} o\big(G(t)\big).$$

Ici, l'entier n est fixé, c'est la variable t qui tend vers $+\infty$.

9. Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall\, t > 0, \qquad G''(t) = g'(t) = (2t-1)\cdot\frac{e^t}{2t\sqrt{t}}.$$

La dérivée seconde $G''(t)$ est du signe de $(2t-1)$, donc G est concave sur $]0, 1/2]$ et convexe sur $[1/2, +\infty[$.

Les variations de convexité de G sont cohérents avec ce qui précède : concavité au voisinage de l'origine (comme la fonction $\sqrt{\cdot}$) et convexité au voisinage de $+\infty$ (avec présence d'une branche parabolique d'axe (Oy)).

10. a. D'après **[5.]**, la fonction h_α est continue sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

D'après **[6.]**, la fonction h_α peut être prolongée en une fonction continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$, donc elle est intégrable au voisinage de 0.

Enfin, d'après **[8.]**,
$$h_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-(\alpha-1)t}).$$

Comme $\alpha-1>0$, la fonction $\big[t\mapsto e^{-(\alpha-1)t}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence) et, par comparaison, la fonction h_α est intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction h_α est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

10. b. Comme la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ **[5.]**, nous allons intégrer par parties.

❧ Nous savons déjà que $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}G(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'autre part,
$$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\cdot G'(t) = \frac{e^{-(\alpha-1)t}}{\alpha\sqrt{t}}$$
et comme $(\alpha-1)>0$, il est clair que cette expression est intégrable en fonction de t sur $]0,+\infty[$.

Enfin, d'après **[6.]**, le produit
$$\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\cdot G(t)$$
tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et, d'après **[8.]**, il tend aussi vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (puisque $\alpha>1$ par hypothèse).

On déduit alors de la formule d'intégration par parties que
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}G(t)\,dt = -\int_0^{+\infty}\frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha}\cdot g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha-1)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

❧ Comme $(\alpha-1)>0$, on peut effectuer le changement de variable affine (et croissant) $u=(\alpha-1)t$ qui donne $du=(\alpha-1)\,dt$ et
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha-1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\alpha-1)t}}{(\alpha-1)\sqrt{t}}\cdot(\alpha-1)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.$$

On reconnaît ici $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ et on en déduit que
$$\forall\,\alpha>1, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}G(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}.$$

11. a. Par définition,
$$u_k(x) = \frac{1}{(k+x+1)\sqrt{k+x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{\alpha-1}}$$
avec $\alpha = k+x+1$. Comme $k\in\mathbb{N}^*$ et $x>-1$, on a bien $\alpha>1$, ce qui suffit à justifier que
$$\forall\,k\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,x>-1, \quad u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(k+x+1)t}G(t)dt.$$

11. b. Soit $x\in\Omega$.

D'après **[6.]**, la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $[t\mapsto\varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.

D'après **[7.]**,
$$\varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1\times2\sqrt{t}}{t} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$$
et comme $[t\mapsto 1/\sqrt{t}]$ est intégrable au voisinage de 0 (règle de Riemann), la fonction $[t\mapsto\varphi(x,t)]$ est aussi intégrable au voisinage de 0.

D'après **[8.]**,
$$\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+2)t}G(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-(x+2)t}e^t) = o(e^{-(x+1)t}).$$

Comme $x+1>0$ (puisque $x\in\Omega$ par hypothèse), la fonction $\big[t\mapsto e^{-(x+1)t}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et, par comparaison, la fonction $[t\mapsto\varphi(x,t)]$ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

La fonction $[t\mapsto\varphi(x,t)]$ est donc intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

11. c. Pour $t\in I=[0,+\infty[$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(k+x+1)t}G(t).$$

❧ D'après **[6.]**, chaque fonction ν_k est continue sur l'intervalle I. D'après **[8.]**,

$$\nu_k(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-(k+x+1)t}e^t) = o(e^{-(k+x)t})$$

et comme $k+x>0$ (puisque $x \in \Omega =]-1,+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que ν_k est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, chaque fonction ν_k est intégrable sur $]0,+\infty[$.

❧ Pour $t>0$, la série $\sum \nu_k(t)$ est une série géométrique :

$$\nu_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G(t)e^{-(x+1)t}\cdot(e^{-t})^k$$

de raison $0 < e^{-t} < 1$, donc elle converge absolument et sa somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G(t)e^{-(x+1)}\cdot\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \varphi(x,t)$$

est une fonction continue de t sur $]0,+\infty[$.

❧ Comme la fonction G est positive, les fonctions ν_k sont positives et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |\nu_k(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} \nu_k(t)\,dt = u_k(x)$$

d'après **[11.a.]**. D'après **[1.]**, la série $\sum u_k(x)$ converge.

On peut donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne) et en déduire que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k(t)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \nu_k(t)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = U(x)\end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$.

11. d. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

❧ Nous avons déjà démontré **[11.b.]** que la fonction $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ était intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x \in \Omega$.

❧ Il est clair que $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω pour tout $t \in]0,+\infty[$ et que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -t\varphi(x,t), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = t^2\varphi(x,t)$$

pour tout $(x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[$.

❧ Pour tout $x \in \Omega$, les deux fonctions

$$\left[t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right]$$

sont clairement continues sur $]0,+\infty[$.

En reprenant les calculs du **[11.b.]**, on constate que ces deux fonctions sont intégrables au voisinage de 0 :

$$t^k\varphi(x,t) \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(t^{k-1/2})$$

(avec $k-1/2>0$ puisque $k=1$ ou $k=2$) et également intégrables au voisinage de $+\infty$:

$$t^k\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^k e^{-(x+1)t}) = o(e^{-(x+1)t/2})$$

avec $x+1>0$.

❧ Enfin, comme

$$|\varphi(x,t)| = \frac{G(t)e^{-t}}{\sqrt{\pi}(e^t-1)}\cdot e^{-tx}$$

est une fonction décroissante de x, on a

$$\forall\,(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}(a,t)\right|$$

pour tout $a>-1$, aussi bien pour $k=1$ que pour $k=2$.

Dans les deux cas, on a trouvé un majorant indépendant de x et intégrable sur $]0,+\infty[$ en fonction de t (intégrabilité justifiée ci-dessus).

On déduit du Théorème de dérivation sous le signe $\int$ que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle

$$\Omega = \bigcup_{a>-1} [a,+\infty[$$

et, pour tout $x \in \Omega$,

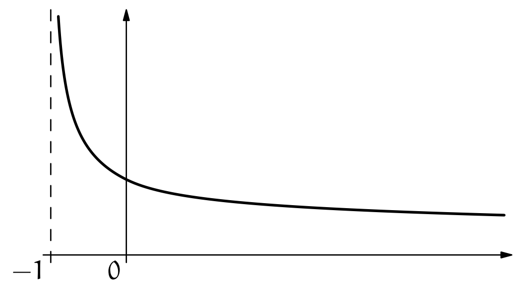
$$\begin{aligned}U'(x) &= -\int_0^{+\infty} t\varphi(x,t)\,dt\\ U''(x) &= \int_0^{+\infty} t^2\varphi(x,t)\,dt.\end{aligned}$$

12. Il est clair que $\varphi(x,t) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \in]0,+\infty[$. On déduit des formules précédentes que

$$\forall\,x \in \Omega, \quad U'(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad U''(x) \geqslant 0.$$

Par conséquent, la fonction U est décroissante et convexe sur Ω.

Sachant de plus que son graphe possède une asymptote verticale en $x=-1$ **[2.b.]** et une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ **[3.d.]**, on imagine que son graphe doit avoir l'allure suivante.



Les Taupins aux yeux de lynx auront repéré l'arnaque : ce graphe n'est pas celui d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$! Je me suis en effet borné à juxtaposer les graphes de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \textit{et de} \quad \frac{2}{\sqrt{4+3\ln(1+x)+x}}.$$

Ces deux fonctions donnent les bons équivalents aux extrémités de Ω ; elles sont égales en $x=0$ (raccord continu) et leurs développements limités à l'ordre 1 en $x=0$ sont égaux (l'astuce du $\ln(1+x)$ nous donne un raccord de classe $\mathscr{C}^1$). Les développements limités à l'ordre 2 diffèrent :

$$1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+o(x^2) \quad \text{vs} \quad 1-\frac{x}{2}+\frac{9x^2}{16}+o(x^2)$$

donc le raccord n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui se traduit par une très légère discontinuité de la courbure (les dérivées secondes en $x=0$ sont quand même assez proches).

Partie C. Approximation de $U(0)$

13. Par hypothèse de récurrence, nB_{n-1} est une fonction polynomiale, donc ses primitives sont aussi des fonctions polynomiales. Notons F_n, la primitive qui s'annule en $x = 0$:

$$F_n(x) = \int_0^x nB_{n-1}(t)\,dt.$$

Pour toute constante $K_n \in \mathbb{R}$, la fonction $F_n + K_n$ est une primitive de nB_{n-1} et

$$\int_0^1 F_n(t) + K_n\,dt = K_n + \int_0^1 F_n(t)\,dt.$$

Par conséquent, il existe une, et une seule, constante

$$K_n = -\int_0^1 F_n(t)\,dt \qquad \text{telle que} \qquad \int_0^1 \big[K_n + F_n(t)\big]\,dt = 0.$$

Cela prouve qu'il existe un, et un seul, polynôme B_n qui vérifie $(\star)$.

14. En prenant le temps nécessaire pour mener les calculs, on obtient

$$B_1 = X - \frac{1}{2}, \qquad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

15. La fonction B_n est continue (elle est polynomiale !) sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur ce segment.

16. Comme B_n est de classe $\mathscr{C}^1$ (elle est polynomiale) !), on déduit du Théorème fondamental et de $(\star)$ avec $(n-1) \geqslant 1$ (puisque $n \geqslant 2$) que

$$B_n(1) = B_n(0) + \int_0^1 B_n'(t)\,dt = B_n(0) + n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = B_n(0).$$

> *Si on a calculé B_1, on voit que $B_1(0) \neq B_1(1)$. Il faut donc clairement mettre en évidence le moment du raisonnement où on se sert de l'hypothèse $n \geqslant 2$.*

17. a. Comme f et B_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties (sur un segment !).

$$\int_0^1 B_1(x)f'(x)\,dx = \big[B_1(x)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 B_1'(x)f(x)\,dx \overset{(\star)}{=} B_1(1)f(1) - B_1(0)f(0) - \int_0^1 B_0(x)f(x)\,dx$$

Par construction, $B_0 = 1$ et, d'après **[14.]**, $B_1(1) = 1/2$ et $B_1(0) = -1/2$, donc on a bien

$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \int_0^1 B_1(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx.$$

17. b. Nous allons procéder par récurrence sur d. En considérant que la somme est nulle pour $d = 1$ (convention habituelle), on a initialisé la démonstration à la question précédente.

Supposons maintenant que la formule soit établie pour un certain entier $d \in \mathbb{N}^*$. Comme B_d est polynomiale et que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, nous pouvons à nouveau intégrer par parties pour exploiter la définition par récurrence des polynômes B_n.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_d(t)f^{(d)}(t)\,dt &\overset{(\star)}{=} \Big[\frac{B_{d+1}(t)}{d+1}\cdot f^{(d)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{d+1}(t)}{d+1}\cdot f^{(d+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{B_{d+1}(1)f^{(d)}(1) - B_{d+1}(0)f^{(d)}(0)}{d+1} - \int_0^1 \frac{B_{d+1}(t)}{d+1}\cdot f^{(d+1)}(t)\,dt \\
&\overset{[16.]}{=} \frac{b_{d+1}}{d+1}\big(f^{(d)}(1) - f^{(d)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{B_{d+1}(t)}{d+1}\cdot f^{(d+1)}(t)\,dt \qquad (\text{car } d+1 \geqslant 2)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(-1)^{d+1}\int_0^1 \frac{B_d(t)}{d!}f^{(d)}(t)\,dt = \frac{(-1)^{d+1}b_{d+1}}{(d+1)!}\big[f^{(d)}(1) - f^{(d)}(0)\big] + (-1)^{d+2}\int_0^1 \frac{B_{d+1}(t)}{(d+1)!}\cdot f^{(d+1)}(t)\,dt$$

et l'hérédité de la propriété est démontrée.

18. Par définition, $P_n(x) = B_n(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$. Comme la fonction B_n est polynomiale, elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction P_n est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$; elle est continue à droite en 0 et tend vers une limite finie (égale à $B_n(1)$) à gauche en 1.

Comme P_n est périodique, de période 1, elle est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

> *Par périodicité, la fonction P_n est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est continue en 0, c'est-à-dire si, $P_n(0^-) = P_n(0)$ (puisqu'elle est déjà continue à droite en 0).*
> *Par périodicité, $P_n(0^-) = P_n(1^-)$, donc P_n est continue en 0 si, et seulement si, $P_n(0) = P_n(1^-)$ et, comme on l'a vu, $P_n(1^-) = B_n(1)$ par continuité de B_n en 1. Comme $B_n(0) = P_n(0)$, on en déduit que P_n est continue en 0 si, et seulement si, $B_n(0) = B_n(1)$, ce qui est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour $n = 0$, mais pas pour $n = 1$* **[16.]**.
> *(Si vous n'avez pas compris, c'est que vous n'avez pas fait de figure.)*

❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la différence $x - \lfloor x \rfloor$ appartient à $[0, 1[$ (c'est la partie fractionnaire de x), donc

$$\left|P_n(x)\right| = \left|B_n(x - \lfloor x \rfloor)\right| \leqslant \|B_n\|_\infty.$$

19. a. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$, on peut définir pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ une fonction $f_\ell : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ en posant

$$\forall\, x \in [0, 1], \qquad f_\ell(x) = f(\ell + x).$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0, 1], \qquad f_\ell^{(k)}(x) = f^{(k)}(\ell + x).$$

On peut donc appliquer la formule du **[17.b.]** aux fonctions f_ℓ et remarquer que :

$$\begin{aligned}
\frac{f_\ell(0) + f_\ell(1)}{2} &= \frac{f(\ell) + f(\ell + 1)}{2} \\
\int_0^1 f_\ell(t)\,dt &= \int_\ell^{\ell+1} f(u)\,du && \text{(changement de variable affine } u = \ell + t\text{)} \\
f_\ell^{(k-1)}(1) - f_\ell^{(k-1)}(0) &= f^{(k-1)}(\ell + 1) - f^{(k-1)}(\ell) \\
\int_0^1 B_d(t) f_\ell^{(d)}(t)\,dt &= \int_0^1 P_d(t) f^{(d)}(\ell + t)\,dt && \text{(} B_d \text{ et } P_d \text{ coïncident sur } [0, 1[\text{)} \\
&= \int_0^1 P_d(\ell + t) f^{(d)}(\ell + t)\,dt && \text{(par périodicité)} \\
&= \int_\ell^{\ell+1} P_d(u) f^{(d)}(u)\,du && \text{(même changement de variable affine)}
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout entier $d \geqslant 2$ et tout entier $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(\ell) + f(\ell + 1)}{2} = \int_\ell^{\ell+1} f(t)\,dt + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(\ell + 1) - f^{(k-1)}(\ell)\right] + (-1)^{d+1} \int_\ell^{\ell+1} \frac{P_d(t)}{d!} f^{(d)}(t)\,dt.$$

❧ On peut donc sommer ces égalités pour $m \leqslant \ell < m + n$. Pour conclure, il reste à remarquer que

$$\sum_{\ell=m}^{m+n-1} \frac{f(\ell) + f(\ell + 1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=m}^{m+n-1} f(\ell) + \frac{1}{2} \sum_{\ell=m+1}^{m+n} f(\ell) = \frac{f(m)}{2} + \sum_{\ell=m+1}^{m+n-1} f(\ell) + \frac{f(m + n)}{2} = \sum_{\ell=m}^{m+n} f(\ell) - \frac{f(m) + f(m + n)}{2},$$

à appliquer la relation de Chasles sur les intégrales :

$$\sum_{\ell=m}^{m+n-1} \int_\ell^{\ell+1} f(t)\,dt = \int_m^{m+n} f(t)\,dt \qquad\qquad \sum_{\ell=m}^{m+n-1} \int_\ell^{\ell+1} B_d(t) f^{(d)}(t)\,dt = \int_m^{m+n} B_d(t) f^{(d)}(t)\,dt$$

et à reconnaître une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=m}^{m+n-1} \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(\ell + 1) - f^{(k-1)}(\ell)\right] &= \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!} \sum_{\ell=m}^{m+n-1} \left[f^{(k-1)}(\ell + 1) - f^{(k-1)}(\ell)\right] \\
&= \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(m + n) - f^{(k-1)}(m)\right].
\end{aligned}$$

19. b. Comme la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale généralisée de f est convergente et, par définition de cette intégrale généralisée,

$$\int_m^{m+n} f(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_m^{+\infty} f(t)\,dt.$$

❧ Comme les dérivées f', f'', ..., $f^{(d-1)}$ tendent toutes vers 0 au voisinage de $+\infty$, on peut aussi passer à la limite dans la somme sur k (puisque $(k-1)$ varie de $2-1=1$ à $d-1$) :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{d}\frac{(-1)^k b_k}{k!}\big[f^{(k-1)}(m+n)-f^{(k-1)}(m)\big]=\sum_{k=2}^{d}\frac{(-1)^k b_k}{k!}\big[-f^{(k-1)}(m)\big]=\sum_{k=1}^{d-1}\frac{(-1)^k b_{k+1}}{(k+1)!}\cdot f^{(k)}(m).$$

❧ Comme f est décroissante (et donc monotone), elle tend vers une limite (finie ou infinie) au voisinage de $+\infty$. Mais comme f est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.

> *La fonction nulle est la seule fonction constante qui soit intégrable au voisinage de $+\infty$.*

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(m)+f(m+n)}{2}=\frac{f(m)}{2}.$$

❧ Puisque f est décroissante et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, c'est une fonction positive. La suite des sommes partielles $f(m)+\cdots+f(m+n)$ est donc croissante en fonction de n. En procédant comme au **[3.b.]** sur l'intervalle $[m,+\infty[$, on obtient que

$$\forall\, n\geqslant 1,\qquad \sum_{\ell=m}^{m+n}f(\ell)\leqslant\int_{m-1}^{+\infty}f(t)\,dt.$$

On a démontré que la suite des sommes partielles était croissante et majorée, donc la série est convergente et, par définition de la somme d'une série convergente,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\ell=m}^{m+n}f(\ell)=\sum_{\ell=m}^{+\infty}f(\ell).$$

❧ En conclusion, dans la relation établie au **[19.a.]**, quatre des cinq termes tendent vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Par linéarité, il en va de même pour le cinquième terme. (Pas le choix, il faut suivre !)

Par définition des intégrales généralisées convergentes,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_m^{m+n}\frac{P_d(t)}{d!}f^{(d)}(t)\,dt$$

et la relation $(\star\star)$ est ainsi établie.

> *On a démontré la convergence de l'intégrale généralisée, on n'a pas démontré que la fonction intégrande était intégrable au voisinage de $+\infty$...*

19. c. D'après le Théorème fondamental, comme $f^{(d)}$ est continue sur $[0,+\infty[$,

$$\forall\,0\leqslant a\leqslant x,\qquad f^{(d-1)}(x)=f^{(d-1)}(a)+\int_a^x f^{(d)}(t)\,dt.$$

On a également supposé que $f^{(d-1)}$ tendait vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty}f^{(d)}(t)\,dt$$

est convergente et puisque $f^{(d-1)}$ tend vers 0, alors

$$\int_a^{+\infty}f^{(d)}(t)\,dt=-f^{(d-1)}(a).$$

❧ Comme la fonction intégrande $f^{(d)}$ est supposée de signe constant, la convergence de l'intégrale généralisée prouve en fait que $f^{(d)}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Comme P_d est continue et bornée, on sait que

$$\forall\,t\geqslant m,\quad \big|P_d(t)f^{(d)}(t)\big|\leqslant\|P_d\|_\infty\big|f^{(d)}(t)\big|$$

et donc (inégalité triangulaire intégrale) que

$$\begin{aligned}\left|\int_m^{+\infty}P_d(t)f^{(d)}(t)\,dt\right|&\leqslant\|P_d\|_\infty\int_m^{+\infty}\big|f^{(d)}(t)\big|\,dt=\|P_d\|_\infty\left|\int_m^{+\infty}f^{(d)}(t)\,dt\right|\qquad\text{(car $f^{(d)}$ est de signe constant)}\\&\leqslant\|P_d\|_\infty\big|f^{(d-1)}(m)\big|.\end{aligned}$$