Réduction des endomorphismes

Applications du cours

Exercice 1

1. Quelle que soit la matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, l'application

$$[M \mapsto P^{-1}MP]$$

est un automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soient A et B, deux matrices semblables.

2. a. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les matrices A^k et B^k sont semblables.

2. b. La matrice A est inversible si, et seulement si, la matrice B est inversible et dans ce cas, A^{-1} et B^{-1} sont semblables.

2. c. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables. En particulier, $Q(A) = 0$ si, et seulement si, $Q(B) = 0$.

Exercice 2 — Officiel2013 254II

1. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter $M(a)^n$ pour $a \neq 0$.

Exercice 3 — Off2014 225

Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -8 & 1 & 6 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme caractéristique de A est $(X+1)^2(X-3)$. Cette matrice est inversible, mais pas diagonalisable.

2. On pose

$$e_1 = (1,2,2), \quad e_2 = \mu \cdot (1,1,1), \quad e_3 = (0,1,0) + \lambda \cdot e_2.$$

La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base si, et seulement si, $\mu \neq 0$.

3. La matrice A est trigonalisable et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pour un choix convenable de λ et μ.

Exercice 4

1. On considère un endomorphisme $u \in L(E)$ dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si $v \in L(E)$ commute à u, alors tout vecteur propre de u est aussi un vecteur propre de v.

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice admettant n valeurs propres positives, deux à deux distinctes.

2. a. S'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, alors il existe une matrice inversible Q telle que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}MQ$ soient diagonales.

2. b. Il existe une, et une seule, matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres positives telle que $M^2 = A$.

Exercice 5

Soient E, un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u, un endomorphisme nilpotent non nul de E, d'indice d.

Il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille

$$\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\big)$$

soit une famille libre. En fait, tout vecteur $x \notin \operatorname{Ker} u^{d-1}$ convient.

Exercice 6

1. Soit $u \in L(E)$. Quels que soient les polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, les sous-espaces $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $Q(u)$.

2. Si deux endomorphismes u et v commutent, alors

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u).$$

Si de plus v est inversible, alors u et v^{-1} commutent.

Exercice 7

Soient E, un espace de dimension finie ; $\mathscr{B}$, une base de E ; f, un endomorphisme de E et H, un hyperplan de E.

1. Il existe une forme linéaire non nulle u dont le noyau est égal à H :

$$H = \big[u(x) = 0\big]$$

et l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, la forme linéaire $u \circ f$ est proportionnelle à u.

2. L'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $\operatorname{Im}(f + \lambda I) \subset H$.

3. Soient $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $L = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

3. a. Quelles sont les tailles respectives de A et de L ?

3. b. L'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, $L^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

4. En déduire les sous-espaces stables par chacune des matrices suivantes.

4. a.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Si le polynôme caractéristique de $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est égal à

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

alors le polynôme caractéristique de A^{-1} est associé à

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1.$$

Exercice 9

Démonstration du Théorème de décomposition des noyaux dans le cas général : on considère un polynôme quelconque P dont on connaît une décomposition en produit de facteurs deux à deux premiers entre eux

$$P = P_1P_2 \cdots P_r$$

et on considère les endomorphismes définis par

$$p_i = A_i(u) \circ Q_i(u)$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.

1. Chaque sous-espace $\mathrm{Ker}\,P_i(u)$ est contenu dans le noyau de p_j, quel que soit $j \neq i$.
2.

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x).$$

3. Si $x_i \in \mathrm{Ker}\,P_i(u)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, alors

$$x_i = \Big(\sum_{j=1}^{r} p_j\Big)(x_i) = p_i(x_i) = p_i\Big(\sum_{j=1}^{r} x_j\Big).$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,P_i(u)$ sont donc en somme directe.
4. Si $P = P_1P_2 \cdots P_r$ est une factorisation en polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\mathrm{Ker}\,P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,P_i(u).$$

Exercice 10

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$A^3 + A - I_n = 0_n.$$

Démontrer que $\det A > 0$.

Exercice 11

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0_n.$$

Démontrer que le rang de A est pair.

Exercices posés en colle et aux oraux

Exercice 12

Démontrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soit E, un espace vectoriel complexe de dimension finie (non nulle). On considère deux endomorphismes u et v.
1. On suppose que

$$u \circ v - v \circ u = 0. \tag{1}$$

Démontrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. On suppose qu'il existe un complexe a non nul tel que

$$u \circ v - v \circ u = au. \tag{2}$$

2. a. Démontrer que u n'est pas inversible.
2. b. Calculer $u^n \circ v - v \circ u^n$ et en déduire que u est nilpotent.
2. c. Démontrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
3. On suppose qu'il existe deux scalaires a et b non nuls tels que

$$u \circ v - v \circ u = au + bv. \tag{3}$$

Démontrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 14

Soient A et B, deux matrices carrées de taille n.

On rappelle que : Si le rang de B est égal à $0 \leqslant r \leqslant n$, alors il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $B = PJ_rQ$.

Démontrer que les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux.

Exercice 15 **Oral CCINP 2022**

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $f \in L(E)$.

Démontrer qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ telle que

$$f \circ g = 0 \quad \text{et} \quad f + g \in GL(E)$$

si, et seulement si,

$$E = \mathrm{Ker}\,f \oplus \mathrm{Im}\,f.$$

Exercice 16 — Oral Mines Telecom 2024

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$A^2 + A + 4I_n = 0_n.$$

1. Démontrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
2. Démontrer que l'entier n est pair. Calculer le déterminant et la trace de A en fonction de n.

Exercice 17 — Oral Mines Telecom 2024

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{rg} B = 1$. Démontrer que

$$\det(A+B) \times \det(A-B) \leqslant \det(A^2).$$

Exercice 18 — Oral Mines-Telecom 2024

Soient E, un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$, un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim E$. On considère un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$u^{n-1}(x_0) \neq 0_E.$$

1. Démontrer que la famille $\mathscr{F} = \big(u^k(x_0)\big)_{0 \leqslant k < n}$ est une base de E.
2. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, démontrer que

$$\dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

3. Démontrer que $\operatorname{Ker} u^k$ est le seul sous-espace de E stable par u dont la dimension soit égale à k.

Exercice 19 — Oral Mines-Telecom 2024

Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Exercice 20 — 132 – 455

1. Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On rappelle que, par définition, un sous-espace H de E est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que H et D soient supplémentaires dans E.

Démontrer qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire ℓ sur E, non identiquement nulle, telle que

$$H = \operatorname{Ker} \ell.$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.
3. Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer $\operatorname{tr}(J_r C)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 21 — 132 – 464

Soient E, un espace vectoriel et $\mathcal{A}$, une sous-algèbre de $L(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par *tous* les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0_E\}$ et E.

Démontrer que, quels que soient les vecteurs $x \neq 0$ et y dans E, il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

Exercice 22 — 132 – 466

1. Démontrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$M^{-1} = P(M).$$

2. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$M^{-1} = P(M)$$

pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 23 — 132 – 467

On note D, l'opérateur de dérivation sur l'espace $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\forall\, f \in E, \qquad D(f) = f'.$$

Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\Phi \in L(E)$ tel que $\Phi \circ \Phi = D$.

Exercice 24 — 132 – 488

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$.
1. On suppose que $\operatorname{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose que $\{\pm 1\} \subset \operatorname{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 25 — 132 – 498

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'application $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A(M) = AM.$$

Démontrer que A et f_A ont même spectre.

Exercice 26 — 132 – 755

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que

$$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(A + kB) = \pm 1.$$

1. Démontrer que la matrice A est inversible.
2. Démontrer que $\det B = 0$.

Exercice 27 — 132 – 759

Soit φ, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A).$$

Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi = \lambda \cdot \operatorname{tr}$.

Exercice 28 **132 – 1111**

Soient E, un espace vectoriel réel de dimension n et u, un endomorphisme de E ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Déterminer le nombre d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

Exercice 29 **132 – 1122**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.
2. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

Exercice 30 **132 – 1125**

Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31 **132 – 1127**

Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ différent de l'endomorphisme nul ω_E et représenté par une matrice A dans la base canonique. On suppose que $f + f^3 = 0$.
1. Démontrer que A n'est pas inversible.
2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + I).$$

3. Démontrer que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul.
4. Démontrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 **132 – 1128**

1. Soit u, un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = n$.
1. a. Démontrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
1. b. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit u, un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2n$.
2. a. Démontrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.
2. b. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 33 **132 – 1129**

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?
2. Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver cette expression en décomposant A sous la forme $I_3 + N$.

Exercice 34 **132 – 1131**

Soient E, un espace vectoriel de dimension trois, et (e_1, e_2, e_3), une base de E.

Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'endomorphisme f_a de E en posant

$$f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 \quad \text{et} \quad f_a(e_2) = 0_E.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f_a.
2. Écrire la matrice A de f_a relative à la base (e_1, e_2, e_3).
3. Calculer A^2. Qu'en déduire ?
4. Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

Exercice 35 **132 – 1132**

Soit φ, l'application définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \psi(P) = P + P'.$$

1. Démontrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. La matrice M_φ qui représente ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle inversible ?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 36 **132 – 1133**

Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}).$$

On suppose que $a + c = b + d = 1$.
1. Démontrer que : si

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
2. Démontrer que $(1, -1)$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
3. Soit V, un vecteur propre non colinéaire à $(1, -1)$, alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Exercice 37 — 132 – 1134

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. Trouver une matrice $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
3. Les matrices $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 38 — 132 – 1135

1. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
1. a. Démontrer que, si la matrice A est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
1. b. Démontrer que cette propriété reste vraie lorsque A n'est pas inversible.
2. Soient f et g, deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une valeur propre non nulle λ de $f \circ g$ et on pose

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(f \circ g - \lambda I) \quad \text{et} \quad F_\lambda = \operatorname{Ker}(g \circ f - \lambda I).$$

2. a. Démontrer que λ est une valeur propre de $g \circ f$, puis que

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \quad \text{et} \quad f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

2. b. En déduire que $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$.

Exercice 39 — 132 – 1137

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, diagonalisable et de rang 1. On se donne trois réels α, β et γ tels que

$$\alpha + \beta = \gamma, \qquad \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

et on considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de B ?
2. On suppose que $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient au noyau de A. Vérifier que la colonne $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de B. En déduire que $\dim \operatorname{Ker} B \geqslant 4$.
3. Démontrer que B est diagonalisable.

Exercice 40 — 132 – 1139

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. Quelle est la dimension du noyau de A ?
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Démontrer que A admet trois valeurs propres : 0, λ et $1 - \lambda$.
5. En déduire un polynôme annulateur de A dont le degré est égal à 3.

Exercice 41 — 132 – 1140

Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $M^4 = 4M^2$ et que 2 et -2 sont des valeurs propres de M.
1. Démontrer que $\operatorname{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 42 — 132 – 1141

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^\top = I_n$.
1. Démontrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
2. Dans cette question seulement, on suppose que M est symétrique. Démontrer que M est diagonalisable, puis que $\operatorname{tr} M$ et $\det M$ sont différents de 0.
3. Démontrer que M est diagonalisable.
4. Démontrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de M.

Exercice 43 — 132 – 1143

1. Soient A, B et C dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $C \neq 0_n$ et que $AC = CB$. Démontrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A).C = C.P(B).$$

2. Démontrer qu'un produit de matrices est inversible si, et seulement si, tous ses facteurs sont inversibles. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.
3. Réciproquement, on suppose que A et B ont une valeur propre commune. Démontrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

Exercice 44 — 132 – 1145

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
2. Démontrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et $B = 0$.

Exercice 45

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top.A = A.A^\top$. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0_n$. En considérant la matrice $B = A^\top.A$, démontrer que $A = 0_n$.

Exercice 46 — 132 – 1176

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2. Démontrer que la matrice A est semblable à une matrice triangulaire. (On donnera une matrice de passage convenable.)
3. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

Exercice 47 — 132 – 1177

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \quad y - z \\ y' = -x \quad\quad + z \\ z' = x - y \end{cases} \tag{S}$$

avec les conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.
1. Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).
2. On suppose que (x, y, z) est une solution de (S). Démontrer que les fonctions $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
3. Résoudre le système (S).

Exercice 48 — 132 – 1198

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les racines réelles des polynômes $X^3 - 2X + 1$ et $X^3 - 2X - 4$.
2. Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice D.
3. Résoudre l'équation $M^3 - 2M = D$, d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Résoudre l'équation $M^3 - 2M = A$, d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 49 — 132 – 1201

On étudie l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le rang et une base de l'image de f.
2. Soit g, l'endomorphisme induit par restriction de f au sous-espace Im f. Démontrer que g est diagonalisable.

Exercice 50 — 132 – 1202

Pour $a > 0$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $-1/a$ est une valeur propre de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Caractériser les sous-espaces propres de A.

Exercice 51 — 132 – 1203

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que A est semblable à jA (où $j = e^{2i\pi/3}$).
1. Démontrer que

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad j\lambda \in \mathrm{Sp}(A).$$

2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
3. Démontrer que $A^2 = 0_2$.
4. Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose que $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 52 — 132 – 1204

Soient u et v, deux endomorphismes de E, espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre λ de $u \circ v$ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
Indication : on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Exercice 53 — 132 – 1206

On considère la suite de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et

$$\forall\, k \geqslant 2, \qquad P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n' = P_{n-1}(X-1).$$

En déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k).$$

3. a. Démontrer que l'application Φ_n définie par

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \Phi_n(Q) = Q - Q'(X+1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. b. Exprimer les polynômes $\Phi_n(P_k)$ en fonction de P_0, …, P_n.
3. c. Démontrer que Φ_n possède une unique valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\Phi_n^{-1}(P_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 54 — 132 – 1208

Soient f et g, deux endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
1. Démontrer que f et g ont un vecteur propre commun.
2. Soit F, un sous-espace strict de E stable par f et par g. On considère un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$ et on note p, la projection sur G parallèlement à F.
2. a. Démontrer que le sous-espace G est stable par

$$f_1 = p \circ f \quad \text{et par} \quad g_1 = p \circ g.$$

2. b. Vérifier que f_1 et g_1 commutent.

3. Soient f_2 et g_2, les endomorphismes respectivement induits par restriction à G des endomorphismes f_1 et g_1. Démontrer que f_2 et g_2 sont trigonalisables.

4. En déduire par récurrence sur n qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

Exercice 55 — 133 - 1277

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_n$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0_n$?

2. Démontrer que

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad \mathrm{tr}[(A+B)^p] = \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p).$$

3. Établir une relation entre rg A et rg B.

Exercice 56 — 133 – 1285

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geqslant 2$) pour laquelle $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer les éléments propres de A.

3. Calculer le déterminant de A.

Réduction des endomorphismes (Solutions)

Solution 1

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Il est clair que l'application

$$C_P = \left[M \mapsto P^{-1}MP\right]$$

est une application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même et que cette application est linéaire :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \forall\,M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$
$$P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda \cdot P^{-1}MP + P^{-1}NP.$$

✍ *Si une propriété vous paraît évidente, dites-le — mais en montrant que vous avez bien compris de quelle propriété il s'agit !*

De plus, d'après l'Astuce taupinale (version multiplicative : $PP^{-1} = I_n$),

$$\forall\,M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P^{-1}(MN)P = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP)$$

et enfin

$$P^{-1}I_nP = I_n$$

donc la conjugaison C_P est bien un (endo)morphisme d'algèbre.

Enfin, il est clair que

$$\forall\,M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad P(P^{-1}MP)P^{-1} = M$$

donc C_p est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont l'application réciproque est

$$C_{P^{-1}} = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right].$$

2. a. On suppose qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$B^k = P^{-1}A^kP,$$

alors

$$B^{k+1} = B^k.B \overset{HR}{=} (P^{-1}A^kP).(P^{-1}AP) = P^{-1}A^{k+1}P.$$

On a donc démontré par récurrence que

$$\forall\,k \in \mathbb{N}^*, \quad P^{-1}A^kP = B^k \tag{$\star$}$$

et donc que les matrices A^k et B^k étaient semblables.

Il est clair que ce résultat est encore vrai (et totalement inintéressant) pour $k = 0$: $A^0 = I_n$ et $B^0 = I_n$ sont semblables (c'est la *réflexivité* de la relation de similitude).

✍ *Le détail le plus important à retenir est clairement visible sur le calcul mais passé sous silence dans la conclusion : la même matrice de passage P convient pour tous les exposants k.*

2. b. Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$ et donc

$$B.(P^{-1}A^{-1}P) = P^{-1}(AA^{-1})P = I_n$$

donc la matrice carrée B est inversible, d'inverse

$$B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

La matrice B^{-1} est donc semblable à la matrice A^{-1}.

✍ *À nouveau, on doit retenir que la même matrice de passage convient pour exprimer la similitude de A et B, ainsi que la similitude de A^{-1} et B^{-1}.*

❧ Par symétrie des hypothèses, l'implication que nous avons démontrée est en fait une équivalence !

✍ *Autant que possible, ne pas se fatiguer à faire deux fois la même chose !*

2. c. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d.$$

D'après ($\star$) et la remarque qui suit, puis par linéarité de C_P,

$$\begin{aligned} Q(B) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (P^{-1}AP)^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k P^{-1}A^k P \\ &= P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right)P = P^{-1}.Q(A).P. \end{aligned}$$

Les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont donc semblables, quel que soit le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$.

✍ *On voit ici combien est important le fait qu'il existe une matrice de passage* commune *pour exprimer la similitude des A^k et des B^k.*

❧ La seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même ! (puisque C_P est un automorphisme d'algèbre).

Comme $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables, on en déduit que

$$Q(A) = 0 \iff Q(B).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont même idéal annulateur **[30]** et en particulier même polynôme minimal **[125]**.

Solution 2

1.

✍ *Nous allons, comme d'habitude, identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et ceux de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on ne fera donc pas de distinction entre*

$$(x, y, z) \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Cependant, on distinguera soigneusement la matrice $M(a)$ et l'endomorphisme f_a représenté par la matrice $M(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, alors la matrice $P^{-1}M(a)P$ (qui est une matrice semblable à $M(a)$) représente f_a dans la base $\mathscr{B}$.

❧ Un calcul direct montre que le polynôme caractéristique de $M(a)$ est égal à $(X-2)(X-1)^2$.

✍ *Si les matrices $M(a)$ et*

$$T(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables, alors $\operatorname{Sp} M(a) = \{2; 1\}$. *Cela simplifie la factorisation du polynôme caractéristique !*

❧ D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de $M(a)$. Les facteurs $(X-2)$ et $(X-1)^2$ sont premiers entre eux, donc les sous-espaces caractéristiques

$$V_2 = \operatorname{Ker}(f_a - 2I_3) \quad \text{et} \quad V_1 = \operatorname{Ker}(f_a - I_3)^2$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et stables par f_a. De plus, on sait que la dimension d'un sous-espace caractéristique est égal à la multiplicité de la valeur propre, donc

$$\dim V_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim V_1 = 2.$$

✍ *Concrètement, cela signifie qu'un vecteur non nul de V_2 est un vecteur directeur de cette droite (il s'agit d'un vecteur propre de f_a associé à la valeur propre 2, car V_2 est en fait un sous-espace propre de f_a) ; que deux vecteurs non proportionnels de V_1 forment* *une base de ce plan et que la famille constituée de ces trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f_a est diagonale par blocs.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

▶ Indépendamment de la valeur de a, le rang de la matrice

$$M(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et le sous-espace propre V_2 est la droite dirigée par $\varepsilon_1 = (0, 1, -1)$.

▶ Par ailleurs,

$$M(a) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $[M(a) - I_3]^2$ est toujours égal à 1 (le sous-espace caractéristique est un plan, quel que soit a) ; celui de la matrice $[M(a) - I_3]$ est égal à 2 (pour $a \neq 0$) ou à 1 (pour $a = 0$ seulement).

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé et si les sous-espaces propres sont égaux aux sous-espaces caractéristiques. Donc la matrice $M(a)$ est donc diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

❧ Quoiqu'il en soit, nous cherchons une base du sous-espace caractéristique V_1, représenté par l'équation cartésienne $[x + ay + (a+1)z = 0]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour $a \neq 0$, le sous-espace $\operatorname{Ker}(f_a - I_3)$ est la droite dirigée par $(1, 1, -1)$ et d'après le cours, il s'agit de chercher un vecteur $\varepsilon_3 \in V_1$ qui n'appartient pas au sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f_a - I_3)$. Le plus simple est donc de choisir $\varepsilon_3 = (a, -1, 0)$ et comme

$$[M(a) - I_3] \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on est conduit à poser $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$.

On a ainsi défini une famille de trois vecteurs : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dont le premier est un vecteur directeur de V_2 et où le couple $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de V_1. Comme les sous-espaces V_1 et V_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, cette famille est une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

De plus,

$$f_a(\varepsilon_1) = 2 \cdot \varepsilon_1, \quad f_a(\varepsilon_2) = 1 \cdot \varepsilon_2, \quad f_a(\varepsilon_3) = 1 \cdot \varepsilon_3 + a \cdot \varepsilon_2$$

donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f_a) = P^{-1} M(a) P \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On en déduit que

$$P^{-1} M(a) P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

où les matrices D (diagonale) et N (nilpotente d'indice 2) commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$P^{-1} M(a)^n P = D^n + \binom{n}{1} a D^{n-1} N$$

avant de revenir dans la base canonique :

$$M(a)^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + na \underbrace{P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{N_0}.$$

✍ *On peut en déduire $M(a)^n$ par calcul matriciel. Mais ça manque franchement d'élégance...*

❧ Un *vrai géomètre* doit remarquer que

$$\Pi_2 = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_1 = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

représentent, dans la base canonique, les projections associées à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = V_2 \oplus V_1$. En particulier, $\Pi_1 = I_3 - \Pi_2$ et on a démontré plus haut que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n \cdot \Pi_2 + 1^n \cdot (I_3 - \Pi_2) + naN_0.$$

Avec $n = 1$ et $n = 2$, on obtient deux équations qui permettent d'en déduire que

$$\Pi_2 = [M(a) - I_3]^2 \quad \text{et que} \quad -aN_0 = [M(a) - I_3][M(a) - 2I_3].$$

❧ Un *véritable arithméticien* (qui connaît les détails de la démonstration du Théorème de décomposition des noyaux) sait que les projections Π_1 et Π_2 sont des polynômes en $M(a)$ et que la résolution de l'équation de Bézout permet de calculer ces polynômes.

Le polynôme $(X-2)(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $M(a)$ écrit comme un produit de facteurs deux à deux premiers entre eux : $P_2 = (X-2)$ et $P_1 = (X-1)^2$. Par conséquent, les polynômes $Q_2 = (X-1)^2$ et $Q_1 = (X-2)$ sont premiers entre eux et l'algorithme habituel nous donne

$$Q_2 - XQ_1 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}[M(a) - 2I_3] \oplus \mathrm{Ker}[M(a) - I_3]^2$$

sont donc

$$\begin{aligned} &\Pi_2 = Q_2[M(a)] = [M(a) - I_3]^2 \\ \text{et} \quad &\Pi_1 = -M(a)Q_1[M(a)] = -M(a)[M(a) - 2I_3]. \end{aligned}$$

La décomposition

$$M(a) = 2 \cdot \Pi_2 + 1 \cdot \Pi_1 + a \cdot N_0$$

nous redonne alors la matrice N_0.

❧ On peut donc arriver à calculer

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n\Pi_2 + \Pi_1 + naN_0$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2 = [M(a) - I_3]^2 &= \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-a&-a-1\\1&a&a+1\end{pmatrix} \\ \Pi_1 = I_3 - \Pi_2 &= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1+a&a+1\\-1&-a&-a\end{pmatrix} \\ aN_0 = -[M(a) - I_3][M(a) - 2I_3] &= \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant très, très peu de calculs matriciels (et sans inverser la matrice P).

✍ *Il est tentant de partir de la décomposition*

$$M(a) = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

mais comme les deux termes de cette décomposition ne commutent pas, elle n'est d'aucun intérêt pratique !

Solution 3

1. On calcule le polynôme caractéristique en effectuant des opérations de pivot avant de développer. Avec un peu de chance, on peut ainsi obtenir une forme factorisée du polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -8 & 2 & 5-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1+X & -1-X \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\
&= (1+X)\begin{vmatrix} -5-X & 2 & 2 \\ -8 & 1-X & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1+X)\begin{vmatrix} -5-X & 4 & 2 \\ -8 & 7-X & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 + C_3) \\
&= -(1+X)\big[(X+5)(X-7)+32\big]
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\chi = (X+1)^2(X-3).$$

- ❧ Le spectre de A est $\{-1,\ 3\}$. Comme 0 n'est pas valeur propre, on en déduit que A est inversible.
- ❧ La valeur propre -1 est double et le rang de

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & 6 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

est (visiblement) supérieur à 2, donc la dimension du sous-espace propre associé à -1 est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre.

Cela suffit pour que A ne soit pas diagonalisable.

✍ *Si on est un peu curieux, on peut vérifier que le sous-espace propre associé à -1 est la droite dirigée par $(1,1,1)$ et que le sous-espace propre associé à 3 est la droite dirigée par $(1,2,2)$.*

On n'est alors pas surpris de retrouver ces vecteurs à la question suivante...

2. Si $\mu = 0$, alors il est clair que la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre !

Si $\mu \neq 1$, alors on peut supposer que $\mu = 1$ (le fait de multiplier e_2 par un scalaire non nul ne change pas le rang de la famille).

Il s'agit alors de vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1+\lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

est inversible. On vérifie sans peine que son rang est bien égal à 3, ce qui prouve que la matrice est inversible et donc que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : la famille $\mathscr{B}$ est une base si, et seulement si, $\mu \neq 0$.

3. Pour calculer la matrice f relative à la base $\mathscr{B}$, il faut exprimer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On commence par calculer ces vecteurs dans la base canonique.

- ❧ Comme

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

on a $f(e_1) = 3 \cdot e_1$.

- ❧ Comme

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on a aussi $f(e_2) = -e_2$ (quelle que soit la valeur de $\mu \neq 0$).

- ❧ Enfin, on a

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ En prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 2$, on a donc

$$f(e_2) = -e_2 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = -e_3 + e_2.$$

La matrice de f relative à $\mathscr{B}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 4

1. Soit x, un vecteur propre de u.

Comme les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles, alors la droite vectorielle dirigée par x est un sous-espace propre de u.

Comme u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v. La droite $\mathbb{K} \cdot x$ est donc stable par v.

Or une droite $\mathbb{K} \cdot x_0$ est stable par v si, et seulement si, son vecteur directeur x_0 est un vecteur propre de v.

Donc x est aussi un vecteur propre de v.

2. a. On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, l'endomorphisme u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^2 = A.$$

En notant v, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, la relation $M^2 = A$ se traduit alors par $v \circ v = u$. En particulier,

$$u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u,$$

donc u et v commutent et d'après **61.**, tout vecteur propre de u est aussi un vecteur propre de v.

Comme u est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de u (et donc de vecteurs propres de v).

En notant Q, la matrice (inversible !) de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}$, les matrices

$$Q^{-1}AQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad \text{et} \quad Q^{-1}MQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

sont donc toutes les deux diagonales.

2. b. Poursuivons notre *analyse* : il existe n réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(puisque les valeurs propres de A sont positives). **Si** les valeurs propres de M sont aussi positives, alors il existe n réels positifs $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

La condition $A = M^2$ donne alors $Q^{-1}AQ = Q^{-1}M^2Q = (Q^{-1}MQ)^2$ et donc

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2).$$

Comme les μ_k sont tous positifs, il faut donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mu_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Il faut donc que

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

et comme l'application $[W \mapsto Q^{-1}WQ]$ est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, cela prouve que **la seule matrice** $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ **possible** telle que $A = M^2$ et ayant n valeurs propres positives **serait** la matrice définie par :

$$M = Q\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^{-1}.$$

✍ *Tout ce qui précède n'a de sens que sous l'*hypothèse *initiale : on a* supposé *qu'il existait une matrice M telle que... En formulant la conclusion précédente au conditionnel, on a constaté que le problème étudié admettait* au plus une *solution (unicité), mais on n'a pas encore justifié qu'il admettait* effectivement *une solution (existence).*

Synthèse.

Comme A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible Q et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Comme les valeurs propres λ_k sont positives, alors la matrice

$$M = Q\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^{-1}$$

est bien définie et de plus

$$\begin{aligned} M^2 &= \left[Q\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^{-1}\right]^2 \\ &= Q\left[\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\right]^2 Q^{-1} \\ &= Q\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

Cette fois, on a bien prouvé que le problème étudié admettait une, et une seule, solution !

✍ *Très souvent, la synthèse ne fait que reprendre des calculs déjà faits, mais* dans un cadre logique différent. *Si les calculs permettent de fonder une preuve, une démonstration ne se réduit jamais à un calcul : c'est pourquoi (en dépit des apparences) on ne démontre pas la même chose lors de l'analyse et lors de la synthèse. C'est pourquoi on ne doit pas négliger la rédaction de la synthèse...*

Solution 5

Comme u est nilpotent d'indice d, alors $u^d = \omega$ et $u^{d-1} \neq \omega$.

Comme u^{d-1} n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{d-1}(x) \neq 0_E$. Un tel vecteur x est fixé pour toute la suite et nous allons démontrer que, *quel que soit ce vecteur* x, la famille

$$\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\big)$$

est libre.

PAR RÉCURRENCE.— On considère une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E. \qquad (\star)$$

Par définition de d, on a $u^d(x) = 0_E$ et par conséquent, $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geqslant d$. On applique l'endomorphisme u^{d-1} : par linéarité,

$$\alpha_0 \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme $u^{d-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha_0 = 0$.

Hypothèse de récurrence :

On suppose qu'il existe un entier $0 \leqslant k < d-1$ tel que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la relation $(\star)$ devient

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{k+1}(x) + \alpha_{k+2} \cdot u^{k+2}(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme $k < d-1$ et que k et d sont des entiers, alors $k \leqslant d-2$, donc $d-k-2 \in \mathbb{N}$. On applique alors l'endomorphisme u^{d-k-2} : il ne reste plus que

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E$$

puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geqslant d$. Or $u^{d-1}(x) \neq 0_E$, donc $\alpha_{k+1} = 0$.

On a ainsi démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

pour tout entier $0 \leqslant k < d-1$. En particulier pour $k = d-2$, on a démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{d-1} = 0,$$

ce qui prouve que la famille

$$\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\big)$$

est libre.

VARIANTE.— Il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence : on peut aussi raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \tag{$\star$}$$

où les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}$ ne sont pas tous nuls. On peut alors poser

$$m = \min\{0 \leqslant k < d \;:\; \alpha_k \neq 0\}$$

puisqu'une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

La relation de liaison $(\star)$ peut donc être écrite sous la forme

$$\alpha_m \cdot u^m(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \tag{$\star\star$}$$

où le scalaire α_m n'est pas nul (par définition de l'indice m).

Comme l'entier m est *strictement* inférieur à l'entier d, alors l'entier $d - m - 1$ est positif, donc u^{d-m-1} existe bien.

Appliquons l'endomorphisme u^{d-m-1} à la relation de liaison $(\star\star)$. On obtient alors

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) + \sum_{k=m+1}^{d-1} \alpha_k \cdot u^{d-m-1+k}(x) = 0_E$$

et comme $d - m - 1 + k \geqslant d - (m+1) + (m+1) = d$ pour tout $m + 1 \leqslant k < d$, il ne subsiste que

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Mais $u^{d-1}(x) \neq 0_E$ (par définition de x) et $\alpha_m = 0$ (par définition de m) : c'est absurde.

Par conséquent, l'hypothèse que les d scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}$ ne soient pas tous nuls est fausse : le résultat est démontré.

Solution 6

1. On sait que les endomorphismes $f = P(u)$ et $g = Q(u)$ commutent, quels que soient les polynômes P et Q.

❧ Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) &= (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) && \text{(f et g commutent)} \\ &= g(0) && (x \in \operatorname{Ker} f) \\ &= 0 && \text{(linéarité de g)} \end{aligned}$$

donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi, le sous-espace $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

❧ Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et

$$\begin{aligned} g(y) &= (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) && \text{(f et g commutent)} \\ &= f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f. \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

2. Si $u \circ v = v \circ u$, alors on démontre par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u^n \circ v = v \circ u^n$$

et comme $I_E = u^0$ commute à v, cette propriété est vraie également pour $n = 0$.

❧ On en déduit que, pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \cdot X^k,$$

$$\begin{aligned} P(u) \circ v = \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \cdot u^k\right) \circ v &= \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \cdot (u^k \circ v) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \cdot (v \circ u^k) && (v \text{ et } u^k \text{ commutent}) \\ &= v \circ \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k\right) && (\text{linéarité de } v) \\ &= v \circ P(u). \end{aligned}$$

❧ Comme v et $P(u)$ commutent, on peut appliquer le raisonnement précédent avec

$$u \leftarrow v, \quad v \leftarrow P(u), \quad P \leftarrow Q$$

pour en déduire que

$$\forall\, Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u).$$

❧ Si u et v commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

et si v est inversible, alors (en composant à gauche par v^{-1})

$$\begin{aligned} v^{-1} \circ (u \circ v) &= v^{-1} \circ (v \circ u) = (v^{-1} \circ v) \circ u \qquad \text{(associativité de } \circ\text{)} \\ &= u \end{aligned}$$

et, en composant maintenant à droite par v^{-1},

$$\begin{aligned} u \circ v^{-1} &= \big(v^{-1} \circ (u \circ v)\big) \circ v^{-1} = (v^{-1} \circ u) \circ (v \circ v^{-1}) \qquad \text{(associativité de } \circ\text{)} \\ &= v^{-1} \circ u. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que u et v^{-1} commutaient.

Solution 7

1. Point de vue géométrique
Comme H est un hyperplan de E, il existe un vecteur $n_0 \neq 0_E$ tel que

$$E = H \oplus \mathbb{R} \cdot n_0.$$

✍ *En fait, n'importe quel vecteur de H peut jouer le rôle du vecteur n_0.*

Cette décomposition en somme directe signifie que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur $p(x) \in H$ et un unique scalaire $u(x) \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = p(x) + u(x) \cdot n_0.$$

L'unicité de cette décomposition permet de démontrer que p est un endomorphisme de E et que u est une forme linéaire sur E (démonstration classique).

En particulier,

$$n_0 = \underbrace{0_E}_{\in H} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}} \cdot n_0$$

et l'unicité de la décomposition prouve que $u(n_0) = 1$, en particulier : la forme linéaire u n'est pas identiquement nulle.

On en déduit que

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) \cdot n_0 = 0_E \\ &\iff u(x) = 0 \qquad \text{(car } n_0 \neq 0_E\text{)} \\ &\iff x \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

c'est-à-dire $H = \operatorname{Ker} u$.

Ainsi, il existe bien une forme linéaire non nulle u dont le noyau est égal à H.

❧ Si la forme linéaire $u \circ f$ est proportionnelle à u, il existe un scalaire λ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad (u \circ f)(x) = \lambda \cdot u(x).$$

En particulier, comme $H = \operatorname{Ker} u$,

$$\forall\, x \in H, \quad u\big[f(x)\big] = \lambda \cdot u(x) = 0_E,$$

ce qui prouve que $f(x) \in \operatorname{Ker} u = H$ et donc que l'hyperplan H est stable par f.

❧ Réciproquement, si l'hyperplan H est stable par u, alors on déduit de la décomposition

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in H} + u(x) \cdot n_0$$

que

$$\forall x \in E, \quad (u \circ f)(x) = u\big[\underbrace{f\big(p(x)\big)}_{\in H = \operatorname{Ker} u}\big] + u(x) \cdot u\big[f(n_0)\big] = \underbrace{u\big[f(n_0)\big]}_{\in \mathbb{R}} \cdot u(x)$$

c'est-à-dire

$$u \circ f = \lambda \cdot u \quad \text{avec} \quad \lambda = u\big[f(n_0)\big] \in \mathbb{R}.$$

On a donc démontré que l'hyperplan H était stable par f si, et seulement si, la forme linéaire $u \circ f$ était proportionnelle à u.

✍ *On rappelle aussi un résultat du cours : Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si, et seulement si, leurs noyaux sont égaux.*

2. D'après la question précédente, l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si,

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ f = \gamma u$$

c'est-à-dire :

$$\exists \lambda = -\gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ (f + \lambda I) = \omega_E$$

ce qui équivaut à :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(f + \lambda I) \subset \operatorname{Ker} u = H.$$

3. a. Il est clair que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que $L = \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

3. b. Matriciellement, l'égalité

$$u \circ f = \gamma \cdot u$$

se traduit par l'égalité

$$LA = \gamma \cdot L$$

c'est-à-dire (en transposant membre à membre) :

$$A^\top . L^\top = \gamma \cdot L^\top.$$

Comme la forme linéaire u n'est pas identiquement nulle, sa matrice L n'est pas la ligne nulle, donc la colonne $L^\top$ n'est pas la colonne nulle et l'égalité précédente signifie que $L^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

❧ Il est temps de remarquer/rappeler qu'il existe un lien analytique très simple entre la forme linéaire u et l'hyperplan H : comme

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) = 0 \\ &\iff LX = 0 \end{aligned}$$

les coefficients de la ligne L sont en fait les coefficients d'une équation cartésienne de H.

❧ Conclusion : Si l'endomorphisme u et l'hyperplan H sont représentés dans une même base $\mathscr{B}$ par la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et par l'équation cartésienne

$$[LX = 0],$$

alors H est stable par f si, et seulement si, la colonne $L^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

Point de vue matriciel

L'étude précédente peut être menée par le calcul seul, à condition de choisir une base particulière de E.

❧ Considérons donc une base

$$\mathscr{B}_H = (e_1, \ldots, e_{n-1})$$

de l'hyperplan H. D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_n tel que

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$$

soit une base de E. (En fait, n'importe quel vecteur n'appartenant pas à H convient pour e_n.)

❧ Décomposons un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathscr{B}_0$:

$$x = \underbrace{x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_{n-1} \cdot e_{n-1}}_{\in H} + x_n \cdot \underbrace{e_n}_{\notin H}.$$

Il est clair que

$$x \in H \iff x_n = 0$$

et donc que H est le noyau de la forme linéaire

$$u = [x \mapsto x_n]$$

représentée par la ligne

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathscr{B}_0$.

❧ Considérons un endomorphisme f de E, représenté par la matrice

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

dans la base $\mathscr{B}_0$.

La matrice relative à $\mathscr{B}_0$ de la forme linéaire $u \circ f$ est égale à

$$LA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les lignes L et LA sont proportionnelles si, et seulement si,

$$a_{1,1} = \cdots = a_{1,n-1} = 0$$

et donc que les formes linéaires u et $u \circ f$ sont proportionnelles si, et seulement si,

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(matrice triangulaire par blocs) ce qui signifie que l'hyperplan H est stable par f.

REMARQUE.— Dans ce cas, la proportionnalité s'écrit

$$LA = a_{n,n} \cdot L.$$

❧ La représentation matricielle de l'image de $(f + \lambda I)$ est le sous-espace engendré par les colonnes de $(A + \lambda I_n)$. L'image de $(f + \lambda I)$ est donc contenue dans l'hyperplan H si, et seulement si, le dernier coefficient de chaque colonne de $(A + \lambda I_n)$ est nul. Dans le cas particulier où $\lambda = -a_{n,n}$, l'image de $(f + \lambda I)$ est contenue dans H si, et seulement si, le dernier coefficient de chacune des $(n-1)$ premières colonnes est nulles, c'est-à-dire si

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

4. a. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

admet -1, 1 et -2 pour valeurs propres : elle est donc diagonalisable.

Si $A = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$, alors il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$D = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Diag}(-1, 1, 2).$$

Dans cette base $\mathscr{B}$, l'hyperplan représenté par l'équation cartésienne

$$0 = ax + by + cz = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times X$$

est stable par f si, et seulement si, la matrice colonne

$$L^\top = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de $D^\top = D$. Il y a donc exactement trois plans stables par f :

$$H_{-1} = [x = 0]_{\mathscr{B}} = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \qquad H_1 = [y = 0]_{\mathscr{B}} = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \qquad H_2 = [z = 0]_{\mathscr{B}} = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

associés respectivement aux trois sous-espaces propres de $D^\top$:

$$\operatorname{Ker}(D^\top + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker}(D^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker}(D^\top - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

En calculant les vecteurs propres de $A^\top$, on peut trouver des équations cartésiennes qui représentent ces trois plans dans la base canonique. Comme

$$\operatorname{Ker}(A^\top + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \operatorname{Ker}(A^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \operatorname{Ker}(A^\top - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

on a donc :

$$H_{-1} = [y + z = 0]_{\mathrm{can}}, \quad H_1 = [x + y - z = 0]_{\mathrm{can}}, \quad H_2 = [x - z = 0]_{\mathrm{can}}.$$

4. b. La matrice

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$$

n'admet qu'une seule valeur propre réelle, car son polynôme caractéristique est égal à

$$(X-1)\Big(X^2 + X + \frac{1}{2}\Big).$$

Comme

$$\operatorname{Ker}(A^\top - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

l'endomorphisme f admet pour seul plan stable le plan

$$H = [x + 2y + 3z = 0]_{\mathrm{can}}.$$

D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \operatorname{Ker}(f - I_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E).$$

Comme le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - I_E)$ est une droite (puisque $(A - I_3)$ et sa transposée $(A^\top - I_3)$ ont même rang), le sous-espace

$$\operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E)$$

est un plan et, en tant que noyau d'un polynôme en f, il est stable par f.

On en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E) = [x + 2y + 3z = 0]_{\mathrm{can}},$$

ce qu'on peut vérifier en calculant

$$A^2 + A + \frac{1}{2} I_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1 & 3/2\\ 1/6 & 1/3 & 1/2\end{pmatrix}.$$

4. c. La matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$$

admet $X^2(X+2)$ pour polynôme caractéristique (et aussi pour polynôme minimal, puisque $A(A + 2I_3) \neq 0_3$, ce qui fait que A n'est pas diagonalisable).

On vérifie sans peine que

$$\operatorname{Ker}(A^\top) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}(A^\top + 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, il existe exactement deux plans stables par f, représentés dans la base canonique par les équations cartésiennes suivantes.

$$[x + z = 0] \qquad [y + z = 0]$$

Ici encore, le Théorème de décomposition des noyaux nous dit que

$$E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\,I_E).$$

Comme $\operatorname{Ker}(f + 2\,I_E)$ est une droite, le sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ est un plan et il est stable par f. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

il est clair que $\operatorname{Ker} f^2 = [y + z = 0]_{\text{can}}$.

L'autre plan stable est bien sûr $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\,I_E)$ (somme directe de deux droites stables).

L'intersection des deux plans stables est représentée par

$$[x + z = 0] \cap [y + z = 0].$$

C'est donc la droite dirigée par $(1, 1, -1)$ et on vérifie facilement que cette droite est bien égale à $\operatorname{Ker} f$.

Solution 8

✍ *On rappelle qu'une fonction*

$$f : X \to \mathbb{K}$$

est dite ***polynomiale*** *lorsqu'il existe* au moins un *polynôme*

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$$

tel que

$$\forall\, x \in X \subset \mathbb{K}, \quad f(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Le principal problème sur les fonctions polynomiales est de savoir s'il y a, ou non, unicité du polynôme P. Ce problème est résolu par le ***Théorème d'identification des fonctions polynomiales*** *:*
S'il existe un polynôme P_0 de degré n tel que

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) = P_0(x)$$

et si $\#(X) > n$, alors P_0 est l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) = P(x).$$

En particulier, si X est une partie infinie *de $\mathbb{K}$, alors l'application*

$$P \longmapsto f = [x \mapsto P(x)]$$

est une application injective de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{A}(X, \mathbb{K})$.

❧ Si le polynôme caractéristique χ_A de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égal à

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

et si la matrice A est inversible, alors

$$a_0 = (-1)^n \det A \neq 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$\det(tI_n - A^{-1}) = \det[(tA - I_n)A^{-1}] = \det(tA - I_n)\det(A^{-1})$$

et pour tout $t \in X = \mathbb{K}^*$,

$$\det(tI_n - A^{-1}) = \frac{(-t)^n}{\det A} \cdot \det\Big(\frac{1}{t} I_n - A\Big) = \frac{t^n}{a_0} \cdot \chi_A\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}.$$

Par définition, le polynôme caractéristique de A^{-1} est le polynôme associé à la fonction

$$\big[t \mapsto \det(tI_n - A^{-1})\big]$$

donc

$$\forall\, t \in X, \quad \chi_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}.$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$, l'ensemble $X = \mathbb{K}^*$ est une partie *infinie*, ce qui permet d'appliquer le Théorème d'identification des fonctions polynomiales rappelé plus haut. On en déduit que

$$\chi_{A^{-1}} = X^n + \frac{a_1}{a_0}X^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}X + \frac{a_n}{a_0}$$

(qui est bien un polynôme unitaire de degré n) et en particulier que le polynôme caractéristique $\chi_{A^{-1}}$ est associé au polynôme

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n.$$

✍ *Pour bien comprendre le problème résolu par le Théorème d'identification, on peut revoir la théorie de l'interpolation de Lagrange : en restriction à un ensemble fini de cardinal $n+1$, toute fonction est en fait une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n. (Ainsi, toute fonction définie en un seul point est constante !)*

❧ *On peut aussi se pencher sur le cas des corps finis : sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la fonction polynomiale*

$$f = \left[x \mapsto x^2 - x\right]$$

est identiquement nulle, alors que les polynômes

$$0 \quad \textit{et} \quad X^2 - X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

sont distincts (ils n'ont pas le même degré).

Solution 9

1. Pour tout $j \neq i$, le polynôme P_i divise le polynôme Q_j et donc aussi le polynôme A_iQ_i. Il existe donc un polynôme $B_{i,j}$ tel que

$$A_iQ_i = B_{i,j}P_i.$$

On en déduit que

$$p_i = (A_iQ_i)(u) = B_{i,j}(u) \circ P_i(u).$$

Si $x \in \operatorname{Ker}[P_i(u)]$, alors $P_i(u)(x) = 0_E$ et donc

$$p_j(x) = B_{i,j}(u)\big[P_i(u)(x)\big] = 0_E.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant r, \quad \operatorname{Ker}[P_i(u)] \subset \operatorname{Ker} p_j.$$

2. On sait que

$$\sum_{i=1}^{r} A_iQ_i = 1.$$

D'après la propriété de morphisme d'algèbres,

$$I_E = \sum_{i=1}^{r}(A_iQ_i)(u) = \sum_{i=1}^{r} p_i.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in E, \qquad x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x).$$

3. Pour démontrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}[P_i(u)]$ sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 0_E \quad \text{et que} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad x_i \in \operatorname{Ker}[P_i(u)].$$

❧ D'après **[136.1]**,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant r, \quad x_j = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_j) = p_j(x_j)$$

puisque $x_j \in \operatorname{Ker} p_i$ pour tout $i \neq j$ **[136.2]**.

❧ Soit $1 \leqslant j \leqslant r$. Par linéarité de p_j,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} p_j(x_i)$$

et d'après **[136.2]** à nouveau,

$$\sum_{i=1}^{r} p_j(x_i) = p_j(x_j).$$

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant r, \quad x_j = p_j(x_j) = 0_E$$

et donc que les sous-espaces $\operatorname{Ker}[P_j(u)]$ sont en somme directe.

4. On vient de démontrer que les sous-espces $\operatorname{Ker}[P_i(u)]$ sont en somme directe.

❧ On sait que $P = P_iQ_i$, donc $P(u) = Q_i(u) \circ P_i(u)$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \operatorname{Ker}[P_i(u)] \subset \operatorname{Ker}[P(u)].$$

On en déduit que

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}[P_i(u)] \subset \operatorname{Ker}[P(u)].$$

❧ Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}[P(u)]$. D'après **[136.1]**,

$$x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x).$$

Par définition des applications p_i,

$$\begin{aligned} P_i(u)\big(p_i(x)\big) = [A_i(u) \circ (P_iQ_i)(u)](x) = A_i(u)[P(u)(x)] &= A_i(u)(0_E) && \text{(car } x \in \operatorname{Ker}[P(u)]) \\ &= 0_E && \text{(par linéarité de } A_i(u)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad p_i(x) \in \operatorname{Ker}[P_i(u)].$$

On a ainsi démontré que

$$\operatorname{Ker}[P(u)] \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}[P_i(u)].$$

❧ Finalement, on a prouvé que

$$\operatorname{Ker}[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}[P_i(u)].$$

✍ Attention, *dans ce contexte, les applications $p_i \in L(E)$ ne sont pas des projecteurs ! En revanche, les endomorphismes induits par restriction des p_i au sous-espace $\operatorname{Ker}[P(u)]$ sont bien des projecteurs...*

Solution 10

L'hypothèse signifie que le polynôme

$$P_0 = X^3 + X - 1$$

est *un* polynôme annulateur de A.

✍ *Rien ne permet de conclure que P_0 est le polynôme* minimal *de A !*

Le polynôme P_0 n'a pas de factorisation évidente. Mais comme les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont des polynômes de degré 1 ou 2, ce polynôme peut être factorisé !

La fonction polynomiale associée à P_0 :

$$f_0 = \big[x \mapsto x^3 + x - 1\big]$$

est continue sur l'intervalle $I =]-\infty, +\infty[$. Il est clair que

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$$

et que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 > 0,$$
donc f_0 est strictement croissante. D'après le Théorème d'inversion, la fonction f_0 réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$, donc le polynôme P_0 admet une, et une seule, racine réelle α. De plus,
$$f_0(0) = -1 < 0 = f_0(\alpha) < 1 = f_0(1),$$
donc $0 < \alpha < 1$ (car f_0 est strictement croissante).

Comme $\deg P_0 = 3$ et que P_0 est **à coefficients réels**, le polynôme P_0 admet deux autres racines, complexes et conjuguées : β et $\overline{\beta}$.

✍ *Si β est une racine complexe d'un polynôme P à coefficients* réels*, alors*
$$P(\beta) = 0 = \sum_{k=0}^{d} a_k \beta^k.$$
En conjuguant cette égalité, on obtient
$$0 = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, \overline{\beta^k} = \sum_{k=0}^{d} a_k (\overline{\beta})^k = P(\overline{\beta})$$
puisque les coefficients a_k sont réels. Cela prouve que $\overline{\beta}$ est aussi une racine de P.

❧ Par conséquent, le polynôme annulateur P_0 est scindé, à racines simples, en tant que polynôme à coefficients complexes :
$$P_0 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\overline{\beta}).$$
Si on considère la matrice A comme une matrice à coefficients complexes, elle est donc diagonalisable : il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que
$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{m_0}, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_{m_1}, \underbrace{\overline{\beta}, \dots, \overline{\beta}}_{m_2}).$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que
$$\operatorname{tr} A = m_0\alpha + m_1\beta + m_2\overline{\beta}.$$
Cela dit, les coefficients de A sont réels, donc la trace de A est réelle. En conjuguant la relation précédente, on obtient :
$$\operatorname{tr} A = m_0\alpha + m_1\overline{\beta} + m_2\beta$$
et, par différence,
$$(m_1 - m_2)(\beta - \overline{\beta}) = 0.$$
Or $\beta \neq \overline{\beta}$ (car la racine β n'est pas réelle), donc $m_1 = m_2$.

❧ Comme deux matrices semblables ont même déterminant,
$$\det A = \alpha^{m_0}\beta^{m_1}\overline{\beta}^{m_2} = \alpha^{m_0}(\beta\,\overline{\beta})^{m_1} = \alpha^{m_0}|\beta|^{2m_1}.$$
Or $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$, donc $\det A > 0$.

Solution 11

L'hypothèse de l'énoncé signifie que le polynôme
$$P_0 = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$$
est un polynôme annulateur de A.

✍ *Rien ne prouve que ce soit le polynôme minimal de A. On sait seulement que le polynôme minimal de A est un diviseur unitaire de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Il y a donc trois polynômes minimaux possibles ici :*
$$X, \quad X^2 + X + 1, \quad X(X^2 + X + 1).$$

Première méthode

Considérons A comme une matrice à coefficients *complexes*. On connaît alors un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = \text{Diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{m_0},\underbrace{j,\dots,j}_{m_+},\underbrace{j^2,\dots,j^2}_{m_-}).$$

❧ Deux matrices semblables ayant même rang, il apparaît sur cette relation que

$$\text{rg}\, A = m_+ + m_-.$$

Deux matrices semblables ayant même trace, on en déduit aussi que

$$\text{tr}\, A = m_+ j + m_- j^2.$$

Or les coefficients de A sont réels, donc la trace de A est réelle et donc égale à son conjugué :

$$\text{tr}\, A = m_+ j^2 + m_- j$$

(puisque j^2 est le conjugué de j). Ainsi, par différence,

$$(m_+ - m_-)(j - j^2) = 0$$

et comme $j \neq j^2$, on en déduit finalement que $m_+ = m_-$ et donc que

$$\text{rg}\, A = 2m_+$$

est bien un entier pair.

Deuxième méthode

Puisque P_0 est un polynôme annulateur de A et qu'on connaît une factorisation de P_0 en produit de facteurs deux à deux premiers entre eux, on peut appliquer le théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \text{Ker}\, A \oplus \text{Ker}(A - jI_n) \oplus \text{Ker}(A - j^2 I_n).$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \text{rg}\, u &= \dim E - \dim \text{Ker}\, u \\ &= \dim \text{Ker}(A - jI_n) + \dim \text{Ker}(A - j^2 I_n). \end{aligned}$$

❧ Le sous-espace propre $\text{Ker}(A - jI_n)$ est un espace de dimension finie et possède donc une base

$$(X_1, \dots, X_r).$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on a donc

$$AX_i = j \cdot X_i.$$

En conjuguant cette relation, on obtient

$$A\overline{X_i} = \overline{A}\,\overline{X_i} = \overline{AX_i} = \overline{j \cdot X_i} = \overline{j} \cdot \overline{X_i} = j^2 \cdot \overline{X_i}$$

car $\overline{A} = A$ (matrice à coefficients *réels*) et $\overline{j} = j^2$. Comme X_i n'est pas nul (en tant que vecteur propre de A), la colonne $\overline{X_i}$ n'est pas nulle et c'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre j^2.

Enfin, si on connaît une relation de liaison :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \overline{X_i} = 0,$$

alors on obtient en conjuguant

$$0 = \overline{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \overline{X_i}} = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i} \cdot X_i.$$

Comme les X_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, constituent une *base* du sous-espace propre $\text{Ker}(A - jI_n)$, ils sont linéairement indépendants, donc les scalaires $\overline{\alpha_i}$ sont tous nuls. Il en va évidemment de même pour les α_i, ce qui prouve que la famille des $\overline{X_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, est une famille libre de vecteurs propres de A associés à la valeur propre j^2.

Par conséquent : $r = \dim \text{Ker}(A - jI_n) \leqslant \dim \text{Ker}(A - j^2 I_n)$.

❧ Par symétrie, si $(Y_1, \dots, Y_q)$ est une base du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - j^2 I_n)$, alors la famille

$$(\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_q})$$

est une famille libre de $\operatorname{Ker}(A - jI_n)$, ce qui prouve que

$$\dim \operatorname{Ker}(A - j^2 I_n) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A - jI_n),$$

donc que

$$\dim \operatorname{Ker}(A - jI_n) = \dim \operatorname{Ker}(A - j^2 I_n)$$

et finalement que le rang de A est un entier pair :

$$\operatorname{rg} A = 2 \dim \operatorname{Ker}(A - jI_n).$$

✍ *L'application*

$$[X \mapsto \overline{X}]$$

définit bien une bijection du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - jI_n)$ *sur le sous-espace propre* $\operatorname{Ker}(A - j^2 I_n)$ *(qui est sa propre réciproque), mais cette bijection n'est pas un isomorphisme ! Cette application est en effet semi-linéaire (et donc pas linéaire) :*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda X + Y) = \overline{\lambda} \cdot \overline{X} + \overline{Y} = \overline{\lambda} \cdot \varphi(X) + \varphi(Y).$$

Solution 12

✍ *Trigonaliser une matrice, c'est assez classique. Mais ici, le problème posé est un peu plus subtil : il faut arriver à une matrice triangulaire imposée.*

Nous allons essayer d'y voir clair (sans pour autant aller jusqu'à évoquer la forme de Jordan).

NB : pour des raisons de rapidité typographique, je confonds les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *et les vecteurs colonnes qui les représentent dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

❧ *On s'inspire de* T *pour étudier* A *: si l'énoncé dit vrai, la seule valeur propre de* A *est égale à* 1 *et le sous-espace propre associé est un plan. Vérifions-le !*

Il est clair que la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1, donc son noyau est un plan.

Plus précisément, en cherchant les relations de liaison entre les colonnes de $(A - I_3)$, on trouve

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(e_1 = (1, 0, 1),\ e_2 = (3, 1, 0)) = [-x + 3y + z = 0].$$

✍ *J'ai calculé un vecteur normal au plan en formant le produit vectoriel des deux vecteurs* e_1 *et* e_2.

Par conséquent, si la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on déduit de la formule du changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux premières colonnes de P sont les vecteurs propres e_1 et e_2 associés à la valeur propre 1 et comme deux matrices semblables ont *même trace*, il faut bien que le troisième coefficient diagonal soit égal à 1.

Dès lors, on sait que le polynôme caractéristique de A est scindé et donc que A est trigonalisable.

Choisissons un vecteur e_3 n'importe où en dehors du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3)$: par exemple, $e_3 = (1, 0, 0)$ (pour faire simple). On en déduit que

$$Ae_3 = e_3 + (1, 1, -2) = e_3 + \left[-2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2\right].$$

Conclusion : on a bien trigonalisé A

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais la matrice triangulaire obtenue n'est pas la bonne !

✍ *Réfléchissons un peu plus. Nous n'avons pas calculé le polynôme minimal de A, c'est un grand tort, car le polynôme minimal a toujours des choses à nous dire.*

On vérifie rapidement que $(A - I_3)^2 = 0_3$ et donc que le polynôme minimal de A est égal à $(X - 1)^2$.
Au passage, la relation $(A - I_3) \times (A - I_3) = 0_3$ implique que

$$\operatorname{Im}(A - I_3) \subset \operatorname{Ker}(A - I_3)$$

et la matrice $(A - I_3)$ écrite plus haut nous dit plus précisément :

$$\operatorname{Im}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2) \subset \operatorname{Ker}(A - I_3).$$

En conséquence, si on choisit e_3 n'importe où en dehors de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$, on aura forcément un scalaire α tel que

$$(A - I_3)(e_3) = \alpha \cdot (1, 1, -2)$$

et ce scalaire α n'est pas nul parce que $e_3 \notin \operatorname{Ker}(A - I_3)$.
Quitte à remplacer e_3 par $({}^1\!/_\alpha) \cdot e_3$, on peut supposer que $\alpha = 1$.
Le problème posé est donc de trouver une base (e_1, e_2) du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ telle que

$$Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$$

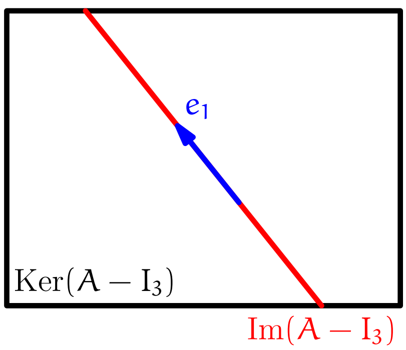
c'est-à-dire

$$a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = (1, 1, -2)$$

<u>où les scalaires a et b sont fixés à l'avance</u> ($a = b = 1$ si on respecte l'énoncé).
Deux situations se présentent.

❧ Premier cas : si $b = 0$ (cas très particulier), alors $a \cdot e_1 = (1, 1, -2)$, donc $a \neq 0$ et par conséquent, il faut que

$$e_1 = \frac{1}{a} \cdot (1, 1, -2) \in \operatorname{Im}(A - I_3).$$

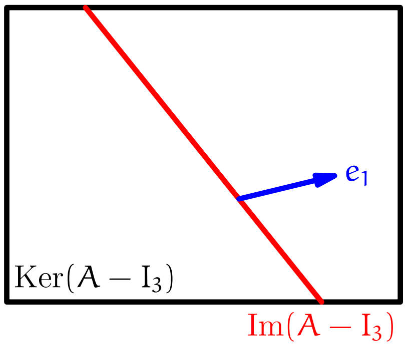


On peut alors choisir e_2 dans $\operatorname{Ker}(A - I_3)$, arbitrairement (puisque $b = 0$) mais pas tout à fait (il faut que e_2 ne soit pas colinéaire à e_1).

❧ Deuxième cas : si $b \neq 0$ (cas général), alors on choisit $e_1 \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$ n'importe où hors de la droite $\operatorname{Im}(A - I_3)$ et on pose

$$e_2 = \frac{1}{b} \cdot \big((1, 1, -2) - a \cdot e_1\big) \in \operatorname{Ker}(A - I_3).$$

Comme $e_1 \notin \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2)$, on en déduit que e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan $\operatorname{Ker}(A - I_3)$.



❧ Conclusion :

Le vecteur e_3 peut être choisi arbitrairement, du moment que $e_3 \notin \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Quels que soient $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut trouver une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ telle que $Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$ avec une grande manœuvre à condition de procéder avec méthode : il faut partir de la relation qu'on cherche à obtenir, pas d'une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(A - I_3)$!

Solution 13

1. Comme E est un espace vectoriel *complexe* distinct de $\{0\}$, le polynôme caractéristique de u est bien défini et scindé. Par conséquent, u admet au moins une valeur propre complexe, soit λ. Nous noterons E_λ, le sous-espace propre de u associé à cette valeur propre.

Comme u et v commutent, le sous-espace propre E_λ de u est aussi stable par v. Comme E_λ est un sous-espace complexe distinct de $\{0\}$, on peut appliquer à v_λ, l'endomorphisme de E_λ induit par restriction de v (puisque le sous-espace E_λ stable par v), le raisonnement tenu pour u : il existe dans E_λ un vecteur propre x_λ pour v_λ.

En particulier, $x_\lambda \neq 0_E$.

Comme v_λ est un endomorphisme de E_λ induit par restriction de v, on en déduit que x_λ est un vecteur propre de v.

Comme E_λ est un sous-espace propre de u et que $x_\lambda \neq 0_E$, le vecteur x_λ est un vecteur propre de u.

Il existe donc bien un vecteur propre commun à u et à v.

2. a. Supposons u inversible. On déduit de la relation (2) que

$$u \circ v = (v + a\,I) \circ u$$

et donc que

$$u \circ v \circ u^{-1} = v + a\,I.$$

En interprétant matriciellement cette relation, on conclut que les endomorphismes v et $v + a\,I$ ont même spectre.

On en déduit par récurrence que v et $v + na\,I$ ont même spectre, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Or E est un espace *complexe* non réduit à $\{0\}$, donc le spectre de v n'est pas vide (comme on l'a expliqué plus haut). Un ensemble non vide et invariant par translation est un ensemble infini : c'est impossible, car le cardinal du spectre de v est inférieur à la dimension de E !

On a ainsi démontré par l'absurde que u n'était pas inversible.

2. b. Nous allons démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n \circ v - v \circ u^n = nau^n. \tag{4}$$

La relation (4) est évidente pour $n = 0$; elle est vraie pour $n = 1$ d'après (2).

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} n+1 \circ v - v \circ n+1 &= u \circ (u^n \circ v - v \circ u^n) + u \circ v \circ u^n - v \circ u^{n+1} \\ &= na \cdot u^{n+1} + (u \circ v - v \circ u) \circ u^n && \text{(HR)} \\ &= na \cdot u^{n+1} + a \cdot u^{n+1} && \text{(par (2))} \\ &= (n+1)a \cdot u^{n+1}. \end{aligned}$$

La relation (4) est donc établie par récurrence.

Si u^n n'est pas l'endomorphisme nul de E, cela signifie que u^n est un vecteur propre de l'endomorphisme

$$\varphi = [w \mapsto w \circ v - v \circ w] \in L(E).$$

Or $L(E)$ est un espace de dimension finie (sa dimension est égale à $(\dim E)^2$), donc l'endomorphisme φ ne peut avoir qu'un nombre *fini* de valeurs propres distinctes.

Si u n'était pas nilpotent, l'endomorphisme φ admettrait pour valeurs propres tous les complexes na, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $a \neq 0$, il aurait donc une infinité de valeurs propres : c'est impossible.

Donc u est nilpotent.

2. c. Puisque u n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul : c'est donc un sous-espace complexe de dimension au moins égale à 1.

Pour tout vecteur $x \in \operatorname{Ker} u$, d'après (2), on a $(u \circ v)(x) = 0_E$, ce qui prouve que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$ et donc que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

Le même raisonnement que celui qu'on a déjà tenu deux fois s'applique : l'endomorphisme v admet un vecteur propre x_0 dans $\operatorname{Ker} u$ et comme x_0 est un vecteur *non nul* de $\operatorname{Ker} u$, c'est aussi un vecteur propre de u associé à la valeur propre 0. On a ainsi démontré que u et v admettaient un vecteur propre commun.

✍ *Le fait que u soit nilpotent ne nous a servi à rien. (Mais la question de la nilpotence de u est archi-classique.)*

3. Soit α, un nombre complexe quelconque. Il est clair que

$$\begin{aligned}(u+\alpha v)\circ v - v\circ(u+\alpha v) &= u\circ v - v\circ u \\ &= au + bv && \text{(par (3))} \\ &= a(u+\alpha v) + (b - a\alpha)v\end{aligned}$$

Comme $a \neq 0$, on peut choisir $\alpha = {}^{b}/_{a}$ et constater que

$$(u+\alpha v)\circ v - v\circ(u+\alpha v) = a(u+\alpha v)$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente aux endomorphismes $(u+\alpha v)$ et v : ils admettent un vecteur propre x_0 commun.

Il existe donc deux complexes λ et μ tels que

$$(u+\alpha v)(x_0) = \lambda x_0 \quad \text{et} \quad v(x_0) = \mu x_0.$$

On en déduit que

$$u(x_0) = (\lambda - \alpha\mu)x_0$$

et comme $x_0 \neq 0_E$, c'est donc un vecteur propre commun à u et à v.

Solution 14

Si B est inversible, alors

$$BA = B(AB)B^{-1}$$

donc BA et AB sont semblables et ont donc même polynôme caractéristique.

❧ On suppose que le rang de B est égal à $0 \leqslant r \leqslant n$ et on reprend les notations de l'énoncé. On pose $A' = QAP$ de telle sorte que

$$AB = (Q^{-1}A'P^{-1})(PJ_rQ) = Q^{-1}(A'J_r)Q.$$

Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, alors AB et $A'J_r$ ont même polynôme caractéristique.

En décomposant A' en blocs sur le modèle de la matrice J_r,

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

$$A'J_r = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_rA' = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\det(A'J_r - tI_n) &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & 0 \\ M_3 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(M_1 - tI_r)\det(-tI_{n-r}) \\ &= \begin{vmatrix} M_1 - tI_r & M_2 \\ 0 & -tI_{n-r} \end{vmatrix} \\ &= \det(J_rA' - tI_n).\end{aligned}$$

Par conséquent, $A'J_r$ et J_rA' ont même polynôme caractéristique.

Les matrices J_rA' et $PJ_rA'P^{-1}$ sont semblables et

$$PJ_rA'P^{-1} = (PJ_rQ)(Q^{-1}A'P^{-1}) = BA,$$

donc J_rA' et BA ont même polynôme caractéristique.

On a ainsi démontré que les matrices AB et BA avaient même polynôme caractéristiques.

✍ *En particulier, ces deux matrices ont même spectre et mêmes sous-espaces caractéristiques. En reprenant les calculs précédents et en raisonnant sur le rang des différentes matrices, on démontre que*

$$\forall\, t \in \mathbb{K}^*, \quad \mathrm{rg}(AB - tI_n) = \mathrm{rg}(BA - tI_n).$$

Par conséquent, les sous-espaces propres de AB et de BA associés à une valeur propre non nulle *sont deux à deux isomorphes.*

Si on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $AB = 0_2$ tandis que $BA = 2A \neq 0_2$, donc $\mathrm{rg}(AB) \neq \mathrm{rg}(BA)$ et les noyaux des deux matrices ne sont pas isomorphes. Cependant, on a bien $\chi_{AB} = \chi_{BA} = X^2$ (la matrice BA est nilpotente d'indice 2).

Solution 15

✍ *Il faut penser à interpréter $f \circ g = 0$ par l'inclusion $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ et à traduire l'hypothèse $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$ par l'existence d'un couple de projections ou d'une base de E adaptée à cette décomposition.*

❧ Supposons que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$. Comme on dispose de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, la projection sur $\mathrm{Ker}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, f$ est bien définie : nous noterons g, cette projection.

Pour tout $x \in E$, on a donc $g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ et par conséquent $f\big(g(x)\big) = 0_E$. Ainsi $f \circ g = 0$.

D'autre part, l'application $f + g$ est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. D'après le Théorème du rang, $f + g$ est un automorphisme si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Considérons donc un vecteur $x \in E$ tel que $(f + g)(x) = 0_E$. Comme $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E, il existe donc $y \in \mathrm{Ker}\, f$ et $z \in \mathrm{Im}\, f$ tels que

$$x = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}\, f} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Im}\, f}.$$

Par linéarité de f et par définition de g (comme projection), on en déduit que

$$f(x) = f(y) + f(z) = f(z) \quad \text{et} \quad g(x) = y.$$

Par conséquent,

$$0_E = (f + g)(x) = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}\, f} + \underbrace{f(z)}_{\in \mathrm{Im}\, f}.$$

Mais $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E, donc

$$y = f(z) = 0_E.$$

On remarque alors que $z \in \mathrm{Im}\, f$ (par hypothèse) et que $z \in \mathrm{Ker}\, f$, tandis que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$ (par hypothèse aussi). Donc $y = z = 0_E$ et on a bien : $x = 0_E$, ce qui prouve que $f + g \in GL(E)$.

✍ ***Variante matricielle.***

On considère une base de E adaptée à la décomposition en somme directe, c'est-à-dire une base de E définie en rassemblant une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base $(e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Im}\, f$ (avec $r = \mathrm{rg}\, f$). Comme les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par f, la matrice de f relative à une telle base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

avec $A_r \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K})$. Comme $\mathrm{rg}\, A_r = \mathrm{rg}\, A = r$, on en déduit que la matrice A_r est inversible.

On peut alors considérer la matrice

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & 0_r \end{pmatrix}.$$

On a bien $AB = 0_n$ et la somme

$$A + B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible (puisqu'elle est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux inversibles).

***NB :** il ne s'agit pas vraiment d'une variante, c'est en fait exactement la même chose que ce qui précède mais sous forme matricielle.*

❧ Réciproquement, supposons qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ soit un automorphisme de E.

Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}.$$

On considère donc un vecteur $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et nous allons vérifier que ce vecteur est nécessairement nul.

Comme $f + g$ est un automorphisme, il existe un (unique) vecteur $z \in E$ tel que

$$x = (f+g)(z) = \underbrace{f(z)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{g(z)}_{\in \operatorname{Im} g}$$

et on sait que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ (puisque $f \circ g = 0$). Cette décomposition de x prouve que

$$E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

et donc que

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

(puisque l'inclusion réciproque est évidente).

D'après la Formule de Grassmann et le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$$

et donc $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ et donc que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

Solution 16

1. Par hypothèse, le polynôme $P_0 = X^2 + X + 4$ est un polynôme annulateur de A. On sait que les valeurs propres de P_0 sont nécessairement des racines d'un tel polynôme. Or le discriminant de P_0 est égal à -15, donc P_0 n'a pas de racines réelles. Par conséquent, la matrice A n'a pas de valeur propre réelle.

2. On peut considérer A comme une matrice à coefficients complexes : $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\overline{A} = A$. Dans ces conditions, le polynôme P_0 est un polynôme annulateur de A qui est scindé à racines (complexes) simples, donc la matrice A est diagonalisable (en tant que matrice à coefficients complexes) : il existe donc une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = \Delta$$

où Δ est une matrice diagonale à coefficients complexes.

❧ Les coefficients diagonaux de Δ sont les valeurs propres (complexes) de A, donc ce sont des racines de P_0. Il n'y a que deux possibilités :

$$\lambda_1 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$$

puisque P_0 n'a que deux racines complexes.

❧ Comme $\overline{A} = A$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \overline{(A - \lambda I_n)X} = (\overline{A} - \overline{\lambda} I_n)(\overline{X}) = (A - \overline{\lambda} I_n)(\overline{X})$$

ce qui prouve que les sous-espaces vectoriels (complexes) $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $\operatorname{Ker}(A - \overline{\lambda} I_n)$ ont même dimension.

Par conséquent, quitte à permuter les colonnes de la matrice de passage Q, on a démontré que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m}, \underbrace{\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_1}}_{m}),$$

ce qui prouve d'une part que la dimension de E est paire :

$$\dim E = n = 2m$$

et donne d'autre part :

$$\operatorname{tr} A = m\lambda_1 + m\overline{\lambda_1}, \quad \det A = \lambda_1^m \cdot \overline{\lambda_1}^m.$$

❧ Comme λ_1 et $\overline{\lambda_1}$ sont les racines du polynôme unitaire P_0, on sait que

$$\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = -1 \quad \text{et que} \quad \lambda_1\overline{\lambda_1} = 4$$

donc

$$\operatorname{tr} A = -m = \frac{-n}{2} \quad \text{et} \quad \det A = 4^m = 2^{2m} = 2^n.$$

✍ *Il faut connaître les formules donnant la somme et le produit des racines d'un polynôme, il est ici inutile d'expliciter λ_1 et λ_2 !*

Solution 17

✍ *Soient E, un espace vectoriel de dimension n et g, un endomorphisme de E dont le rang est égal à 1. D'après le Théorème du rang, le noyau de g est un sous-espace de dimension $(n-1)$ et d'après le Théorème de la base incomplète, il existe une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E telle que $(e_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.*

La matrice de g relative à cette base est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ Comme $\operatorname{rg} B = 1$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La première colonne de $P^{-1}BP$ sera notée C_1'.

Notons également $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice $P^{-1}AP$.

❧ Deux matrices semblables ont même déterminant, donc

$$\det A = \det(C_1, \dots, C_n)$$

et

$$\begin{aligned} \det(A+B)\det(A-B) &= \det(P^{-1}[A+B]P)\det(P^{-1}[A-B]P) \\ &= \det(P^{-1}AP + P^{-1}BP)\det(P^{-1}AP - P^{-1}BP) \\ &= \det(C_1 + C_1', C_2, \dots, C_n)\det(C_1 - C_1', C_2, \dots, C_n) \\ &= \big[\det A + \det(C_1', C_2, \dots, C_n)\big] \times \\ &\qquad \big[\det A - \det(C_1', C_2, \dots, C_n)\big] && \text{(linéarité par rapport à la première colonne)} \\ &= (\det A)^2 - [\det(C_1', C_2, \dots, C_n)]^2 && \text{(identité remarquable)} \\ &\leqslant \det(A^2). && \text{(propriété de morphisme)} \end{aligned}$$

Solution 18

1. ✍ *Par définition de l'indice de nilpotence, u^n est l'endomorphisme nul tandis que l'endomorphisme u^{n-1} n'est pas identiquement nul. Il existe donc bien un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et, bien évidemment, ce vecteur x_0 n'est pas nul.*

Dans un espace de dimension n, une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, cette famille est libre. Il suffit donc de vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

On considère donc une famille $(\alpha_k)_{0\leqslant k<n}$ de scalaires tels que

$$\sum_{0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) = 0_E.$$

Si les scalaires α_k ne sont pas tous nuls, alors l'ensemble

$$\{0 \leqslant k < n \,:\, \alpha_k \neq 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet par conséquent un plus petit élément k_0. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0_E &= \sum_{0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{0\leqslant k<k_0} \underbrace{\alpha_k}_{=0} \cdot u^k(x_0) + \sum_{k_0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \\ &= \sum_{k_0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^k(x_0) \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant k_0 < n$, on a bien $(n-1)-k_0 \in \mathbb{N}$, donc on peut composer par l'application linéaire $u^{(n-1)-k_0}$:

$$\begin{aligned} 0_E = u^{(n-1)-k_0}(0_E) = u^{n-1-k_0}\Big(\sum_{k_0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^k(x_0)\Big) \\ = \sum_{k_0\leqslant k<n} \alpha_k \cdot u^{n-1+(k-k_0)}(x_0) \\ = \alpha_{k_0} u^{n-1}(x_0) \qquad \text{(terme avec } k = k_0) \end{aligned}$$

puisque u^n est l'endomorphisme nul et que $n-1+(k-k_0) \geqslant n$ pour tout $k > k_0$.

On est arrivé à une contradiction :

— par hypothèse sur x_0, le vecteur $u^{n-1}(x_0)$ n'est pas nul
— et, par hypothèse sur k_0, le scalaire α_{k_0} n'est pas nul
— alors que le produit $\alpha_{k_0} \cdot u^{n-1}(x_0)$ est nul.

Par conséquent, tous les scalaires α_k sont nuls et on a démontré que la famille $\mathscr{F}$ était une base de E.

2. Toute sous-famille d'une famille libre est elle aussi libre. D'après la question précédente, pour tout entier $0 \leqslant p < n$, la sous-famille

$$\mathscr{F}_p = \big(u^\ell(x_0)\big)_{p\leqslant \ell<n}$$

est libre.

Par ailleurs, comme u^n est l'endomorphisme nul,

$$\forall\, p \geqslant n, \quad u^p(x_0) = 0_E.$$

❧ Considérons maintenant l'image par u^k de la base $\mathscr{F}$:

$$(u^k)_*(\mathscr{F}) = \big(u^{k+\ell}(x_0)\big)_{0\leqslant \ell<n} = \big(u^\ell(x_0)\big)_{k\leqslant \ell<n+k}.$$

✍ *Si on connaît une base d'un espace de dimension finie E, il faut s'en servir pour étudier les propriétés d'un endomorphisme de E : c'est fait pour !*

La sous-famille

$$\big(u^\ell(x_0)\big)_{k\leqslant \ell<n}$$

est une famille libre de $(n-k)$ vecteurs contenue dans l'image de u^k, donc

$$\operatorname{rg} u^k \geqslant n-k.$$

D'autre part, $u^\ell(x_0) = 0_E$ pour $n \leqslant \ell < n+k$, donc la famille

$$\big(u^\ell(x_0)\big)_{n-k\leqslant \ell<n}$$

est une famille libre (en tant que sous-famille de $\mathscr{F}$) constituée de k vecteurs appartenant au sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$. Cela prouve que

$$\dim \operatorname{Ker} u^k \geqslant k.$$

Comme u^k est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le Théorème du rang :

$$n = \dim E = \operatorname{rg} u^k + \dim \operatorname{Ker} u^k.$$

On peut alors déduire des inégalités précédentes que

$$\operatorname{rg} u^k = n - k \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} u^k = k.$$

3. On a démontré que $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ et on sait que $\operatorname{Ker} u^k$ est stable par u (en tant que noyau d'un polynôme en u).

❧ Soit V_k, un sous-espace de E de dimension k, qu'on suppose stable par u. On peut donc considérer l'endomorphisme $u_k \in L(V_k)$ induit par restriction de u à V_k. Par définition,

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k(x) = u(x)$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

L'endomorphisme u_k est donc nilpotent.

D'une manière générale, l'indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace, donc l'indice de nilpotence de u_k est inférieur à $k = \dim V_k$ et

$$\forall\, x \in V_k, \quad u_k^k(x) = u^k(x) = 0_E.$$

On a ainsi démontré que $V_k \subset \operatorname{Ker} u^k$.

Mais $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ (d'après la question précédente) et $\dim V_k = k$ (par hypothèse). Donc $V_k = \operatorname{Ker} u^k$ (inclusion et égalité des dimensions [finies]).

❧ On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker} u^k$ était le seul sous-espace stable par u dont la dimension est égale à k.

Solution 19

Ce système différentiel (linéaire, à coefficients constants) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4I_2 - J$$

où J est la célèbre matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❧ On se souvient alors que

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),$$

on a donc

$$Q^{-1}JQ = \operatorname{Diag}(2, 0)$$

et donc

$$Q^{-1}AQ = 4I_2 - Q^{-1}JQ = \operatorname{Diag}(2, 4).$$

❧ On pose alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}X(t)$$

et on obtient

$$Y'(t) = \operatorname{Diag}(2, 4)Y(t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}.$$

Ce système peut être résolu de tête : la fonction X est solution du système différentiel initial si, et seulement si, il existe deux constantes a et b réelles telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{4t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} - be^{4t} \end{pmatrix}.$$

Solution 20

1. Supposons que H soit un hyperplan de E. Par définition, il existe une droite D telle que

$$E = H \oplus D$$

et comme D est une droite, il existe un vecteur u (non nul!) tel que $D = \mathbb{K} \cdot u$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc un unique couple

$$\big(y, \ell(x)\big) \in H \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x) \cdot u. \tag{5}$$

On a ainsi défini une application $\ell : E \to \mathbb{K}$.

▶ Étant donnés deux vecteurs x_1 et x_2 dans E, il existe donc deux vecteurs y_1 et y_2 dans H et deux scalaires $\ell(x_1)$ et $\ell(x_2)$ tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1) \cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2) \cdot u.$$

Pour tout scalaire α, on a donc

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = (\alpha \cdot y_1 + y_2) + \big[\alpha\ell(x_1) + \ell(x_2)\big] \cdot u.$$

Mais en appliquant (5) au vecteur $\alpha \cdot x_1 + x_2$, on a aussi

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in H} + \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) \cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (5) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall\, x_1, x_2 \in E,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) = \alpha\ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que ℓ est bien une forme linéaire sur E.

▶ Comme $u = 0_E + 1 \cdot u$ avec $0_E \in H$ et $1 \in \mathbb{K}$, l'unicité de la décomposition (5) nous dit que $\ell(u) = 1$, donc la forme linéaire ℓ n'est pas identiquement nulle.

▶ Si $\ell(x) = 0$, alors $x = y + \ell(x) \cdot u = y \in H$.

Réciproquement, si $x \in H$, alors $x = x + 0 \cdot u$ avec $x \in H$ et $0 \in \mathbb{K}$. À nouveau, l'unicité de la décomposition (5) nous donne $\ell(x) = 0$.

L'hyperplan H est donc bien le noyau de la forme linéaire ℓ.

❧ Réciproquement, si H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non identiquement nulle, alors il existe un vecteur u tel que $\ell(u) \neq 0$. Par linéarité de ℓ, ce vecteur u ne peut être nul et

$$\forall\, x \in H, \quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot \ell(u) = \ell\Big(\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u$$

appartient à $\operatorname{Ker} \ell = H$ (principe de superposition).

Chaque vecteur $x \in E$ admet donc une décomposition

$$\underbrace{\Big[x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K} \cdot u},$$

ce qui prouve que $E = H + \mathbb{K} \cdot u$.

Enfin, comme $\ell(u) \neq 0$, le vecteur u n'appartient pas à H et la droite dirigée par $\mathbb{K} \cdot u$ est donc en somme directe avec H.

On a ainsi démontré que $E = H \oplus D$ et donc que H est un hyperplan.

✍ *Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.*

Considérons un espace E de dimension 3 et un plan $P \subset E$: il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de ce plan et on peut la compléter en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E. À cette base correspondent des formes coordonnées ε_1^*, ε_2^*, ε_3^* telles que

$$\forall\, u \in E, \qquad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan P est le noyau de la forme coordonnée ε_3^* :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E*, le plan* P *peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où*

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*. Le plan* P *apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire* ℓ *définie par*

$$\forall\, u : (x, y, z) \in E, \qquad \ell(u) = ax + by + cz.$$

On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \mathrm{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Φ est donc bien une application de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$ des formes linéaires sur E.

❧ Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ, un scalaire. Alors

$$\begin{aligned}\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}\big[(\lambda A + B)M\big] &= \mathrm{tr}(\lambda AM + BM)\\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(AM) + \mathrm{tr}(BM)\\ &= \lambda\Phi(A)(M) + \Phi(B)(M).\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que Φ est une application *linéaire* de E dans E^*.

✍ *On sait que* $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ *et que* $\dim L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = n^2 \times 1 = n^2$*, c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que* Φ *soit injective pour que* Φ *soit un isomorphisme.*

Soit $A \in \mathrm{Ker}\,\Phi$. Cela signifie que $\mathrm{tr}(AM) = 0$ pour *toute* matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Avec les notations habituelles,

$$\mathrm{tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que Φ était un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

✍ *Avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle\, A^\top \,|\, M \,\rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3. La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice I_n, donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

❧ Multiplier à gauche par J_r revient à annuler les $(n - r)$ dernières lignes de la matrice C. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant r \leqslant n, \quad \mathrm{tr}(J_r C) = 0.$$

4. Soit H, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire *non nulle* ℓ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\ell$ (première question) et une matrice A *non nulle* telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \ell(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit} \quad A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \mathrm{tr}(Q.J_rP^{-1}M) = \mathrm{tr}(J_rP^{-1}M.Q)$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et $\ell(M) = \mathrm{tr}(J_rC) = 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible PCQ^{-1}.

On a ainsi démontré que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Solution 21

❧ Il est clair que l'ensemble
$$F = \{u(x),\ u \in \mathcal{A}\}$$
est contenu dans l'espace vectoriel E.

❧ Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, alors l'application nulle ω_E appartient à $\mathcal{A}$ et par conséquent
$$0_E = \omega_E(x) \in F.$$

Quels que soient le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et les vecteurs a et b dans F, il existe deux endomorphismes u et v dans $\mathcal{A}$ tels que
$$a = u(x) \qquad \text{et} \qquad b = v(x).$$
Par conséquent,
$$\lambda a + b = (\lambda u + v)(x).$$
Or $\lambda u + v \in \mathcal{A}$ (une algèbre est stable par combinaison linéaire), donc
$$\lambda a + b \in F.$$

Ainsi, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.

❧ Une algèbre est, par définition, unitaire, donc $I_E \in \mathcal{A}$ et donc
$$x = I_E(x) \in F.$$
Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, le sous-espace F n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

❧ Soit $a \in F$: il existe donc $v \in \mathcal{A}$ tel que $a = v(x)$.

Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la composée $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ (stable par $\circ$, qui est la multiplication interne), donc
$$u(a) = (u \circ v)(x) \in F.$$
Le sous-espace F est donc stable par $\mathcal{A}$. Comme il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, il est par hypothèse égal à E.

❧ Pour tout $y \in E$, on a donc $y \in F$ et, par construction de F, il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

Solution 22

1. Toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal $P_0 \in \mathbb{K}[X]$. Or les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres et M est inversible, donc 0 n'est pas racine du polynôme minimal. Ainsi, le coefficient constant du polynôme minimal n'est pas nul :
$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$
Comme P_0 est un polynôme annulateur de M, on en déduit que
$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \cdots + a_1 M + a_0 I_n = 0_n$$
et donc que
$$M\Big(M^{d-1} + a_{d-1}M^{d-2} + \cdots + a_2 M + a_1 I_n\Big) = -a_0 I_n,$$
ce qui prouve que le polynôme
$$P = \frac{-1}{a_0}\Big(X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \cdots + a_2 X + a_1\Big)$$
vérifie $M^{-1} = P(M)$.

2. Le polynôme P qu'on vient d'exhiber dépend de la matrice M.

S'il existait un polynôme P indépendant de la matrice M (entre les deux questions, seule la position des quantificateurs est modifiée), alors il faudrait en particulier que
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda I_n) = \frac{1}{\lambda} I_n$$
et donc que
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$
► Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la propriété précédente est impossible (limite à l'origine ou à l'infini !). Il n'existe donc pas de polynôme universel !

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda^{-1} = \lambda$$
et le polynôme $P = X$ vérifie la condition nécessaire.

Il y a $16 = 2^4$ matrices dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, parmi lesquelles six sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que ces six matrices vérifient $A^2 = I_2$, c'est-à-dire $A^{-1} = A$. Autrement dit, le polynôme X convient pour toutes les matrices de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

► Ce n'est pas vrai dans $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ puisque les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont distinctes.

✍ *Cela prouve que le polynôme X n'est pas universel, cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de polynôme universel !*

► Quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et le nombre premier p, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne contient que p^{n^2} matrices, donc le groupe $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini.

En parcourant l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on n'a donc qu'un nombre *fini* de polynômes minimaux.

Le ppcm de ces polynômes est donc un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et le raisonnement de la première question permet d'en déduire qu'il existe un polynôme universel P tel que
$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad P(M) = M^{-1}.$$

Solution 23

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un endomorphisme Φ de E tel que $\Phi^2 = D$.

❧ On considère le vecteur $f = [x \mapsto e^{-x}] \in E$ et on pose alors
$$g = \Phi(f) \in E.$$
Ce vecteur g n'est pas nul, car
$$\Phi(g) = \Phi \circ \Phi(f) = D(f) = -f \neq 0_E.$$
Le vecteur g est donc un vecteur propre de D associé à la valeur propre -1 :
$$D(g) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(f) = \Phi\big[(\Phi \circ \Phi)(f)\big] = \Phi[D(f)] = -\Phi(f) = -g$$
par linéarité de Φ.

❧ Mais chercher les vecteurs propres de D associés à la valeur propre -1 :
$$D(y) = (-1) \cdot y$$
équivaut à résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.

Les solutions de cette équation différentielle constituent la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot f$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \cdot f$.

❧ Par linéarité de Φ, on en déduit que
$$\Phi(g) = \lambda \cdot \Phi(f) = \lambda \cdot g.$$
Mais, par définition de g,
$$\Phi(g) = (\Phi \circ \Phi)(f) = D(f) = -f,$$
donc
$$f = -\lambda \cdot g = -\lambda \cdot (\lambda \cdot f) = -\lambda^2 \cdot f.$$
Comme $f \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible puisque $\lambda \in \mathbb{R}$. CQFD

Solution 24

1. On connaît un polynôme annulateur de A et il est scindé :

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1).$$

La matrice A est donc trigonalisable. Comme notre polynôme annulateur possède une racine double, rien ne prouve pour le moment que la matrice A soit diagonalisable. On sait cependant que le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur connu :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

❧ Si $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$, alors en fait

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$$

et en particulier A est inversible. Par conséquent, il reste $A^2 = I_n$ et A admet $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme annulateur est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

✍ *Dans ce cas, le polynôme $(X-1)(X+1)$ est en fait le polynôme minimal de A.*

2. Dans un second temps, on a

$$\{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

▶ Si $n = 2$, alors A possède au plus deux valeurs propres distinctes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$ et, pour les mêmes raisons que précédemment, la matrice A est diagonalisable.

▶ Si $n = 3$ et si $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \pm 1\}$, alors A est une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles).

▶ Si $n = 3$ et si $\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$, alors A est inversible et, comme plus haut, elle est donc diagonalisable.

▶ Si $n = 4$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$$

vérifie bien $A^4 = A^2$ mais

$$A(A - I_4)(A + I_4) = A^3 - A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4,$$

donc son polynôme minimal est $X^2(X-1)(X+1)$, ce qui prouve que A n'est pas diagonalisable.

✍ *On aurait pu aussi observer que le noyau de A était une droite et que, par conséquent, la somme des dimensions des sous-espaces propres était égale à 3 (et pas à 4) pour conclure.*

Solution 25

Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors

$$AX = \lambda X$$

donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

n'est pas la matrice nulle (puisque X n'est pas la colonne nulle) et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc M est un vecteur propre de f_A associé à λ.

✍ *Les matrices*

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de n vecteurs propres de f_A associés à λ. Si la matrice A est diagonalisable, alors on peut définir une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et en déduire une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de f_A : cela prouve que f_A est diagonalisable.

❧ Réciproquement, s'il existe une matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \neq 0_n$$

telle que

$$f_A(M) = \lambda M,$$

alors

$$\begin{pmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n \end{pmatrix} = AM = \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda C_1 & \lambda C_2 & \cdots & \lambda C_n \end{pmatrix}.$$

Comme $M \neq 0_n$, il existe au moins une colonne C_j *non nulle* et comme

$$AC_j = \lambda C_j,$$

on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A.

Solution 26

1. Pour $k = 0$, on a $\det A = \pm 1$, donc A est inversible en tant qu'élément de (l'algèbre) $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Cela dit, d'après les formules de Cramer,

$$A.\mathrm{Com}(A)^\top = \det A.I_n = \pm I_n.$$

Puisque les coefficients de la comatrice sont des déterminants de matrices extraites de A (et donc de matrices *à coefficients entiers*), la comatrice appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ et la matrice A est donc inversible dans l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

2. Supposons que $\det B \neq 0$. D'après la propriété de morphisme de det et l'hypothèse,

$$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(AB^{-1} + kI_n) = \frac{\pm 1}{\det B}.$$

Dans cette identité, le paramètre k prend $(2n+1)$ valeurs et l'expression $\det(AB^{-1} + kI_n)$ prend au plus deux valeurs : cette expression prend donc l'une des valeurs au moins $(n+1)$ fois.

Or l'application

$$\left[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n + AB^{-1})\right]$$

est une application polynomiale de degré n : c'est le polynôme caractéristique de la matrice $-AB^{-1}$.

Si une application polynomiale prend $(n+1)$ fois la même valeur, il n'y a que deux possibilités : ou bien elle est constante, ou bien son degré est au moins égal à $(n+1)$. Quoi qu'il en soit, son degré ne peut pas être égal à n. Notre hypothèse est donc absurde, on a démontré que $\det B = 0$.

Solution 27

✍ *Pour se lancer dans la démonstration qui suit, il faut commencer par traduire l'énoncé : deux matrices semblables ont toujours même image par φ.*

On note, comme de coutume, $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$. Pour $i \neq j$, la matrice $D + E_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D (mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités).

Par hypothèse, $\varphi(D + E_{i,j}) = \varphi(D)$ et par linéarité de φ,

$$\forall\, i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) = 0.$$

❧ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, les matrices $E_{1,1}$ et $E_{i,i}$ sont semblables : la matrice de permutation

$$P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P_{1,i}^{-1} E_{i,i} P_{1,i} = E_{1,1}$ et par conséquent, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$.

✍ *Autre point de vue : la matrice* $E_{1,1}$ *représente l'application linéaire*

$$[(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \dots, 0)]$$

dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ *et la matrice* $E_{i,i}$ *représente cette même application linéaire dans la base*

$$(e_i, e_2, \dots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

En posant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, on a donc

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \lambda = \lambda \operatorname{tr} A$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 28

Comme u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)$$

et ses sous-espaces propres sont des droites :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I) = 1.$$

Si $v^2 = u$, alors u et v commutent (ce sont deux polynômes en v) et par conséquent, tout sous-espace propre de u est aussi stable par v. Comme les sous-espaces propres de u sont des droites, leurs vecteurs directeurs respectifs (qui sont par construction des vecteurs propres de u) sont donc des vecteurs propres de v.

Autrement dit, quelle que soit la base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres $\boxed{\text{pour } u}$ considérée,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Mais $u = v^2$, donc $D = \Delta^2$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k^2 = \lambda_k.$$

❧ On distingue alors les cas suivants.

▶ Si l'un des λ_k au moins est strictement négatif, le problème posé n'a pas de solution. (On travaille sur un espace vectoriel réel, donc les μ_k doivent être réels).

▶ Si tous les λ_k sont strictement positifs, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k = \pm\sqrt{\lambda_k}.$$

Il y a donc 2^n choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et donc 2^n endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

▶ Si l'un des λ_k est nul ($\lambda_1 = 0$ par exemple), alors les $(n-1)$ autres sont strictement positifs (puisqu'ils sont deux à deux distincts) et il y a cette fois seulement 2^{n-1} choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ (puisqu'on a nécessairement $\mu_1 = 0$) et donc seulement 2^{n-1} endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

Solution 29

1. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

✍ *Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de* A*, même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)*

✍ *Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

▶ La deuxième colonne de la matrice A nous indique que 1 est une valeur propre de A. De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$.

▶ La trace de A est égale à 3 et comme A est diagonalisable, il existe deux réels $1 \pm \alpha$ tels que $\operatorname{Sp}(A) = \{1-\alpha;\ 1;\ 1+\alpha\}$.
Le déterminant de A est égal à -3 (calcul rapide) et aussi à $1 - \alpha^2$, donc $\alpha = 2$ et

$$\operatorname{Sp}(A) = \{-1;\ 1\ 3\}.$$

▶ Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $\operatorname{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$.

▶ En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{Diag}(-1,\ 1,\ 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres -1, 1 et 3).

✍ *On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.*
On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage P orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

2. En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de A.

✍ *Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle $y' = y$ et d'autre part le système*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

❧ **Première méthode.**
En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) &= -u(t) \\ v'(t) &= v(t) \\ w'(t) &= 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \qquad v(t) = K_2 e^{t}, \qquad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc $X = (x, y, z)$ est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^{t} \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✍ *Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.*

Cela dit, le cours nous dit que la solution X peut s'exprimer en fonction de la position initiale $X(0)$ à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \dfrac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé P^{-1}) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne $X(0)$ est quelconque, on peut en déduire $\exp(tA)$ par identification.

Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

❧ **Deuxième méthode**

On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour A :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale P_k sur la droite $\mathbb{R} \cdot U_k$ est donnée par

$$P_k = \frac{U_k.U_k^{\top}}{U_k^{\top}.U_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres U_1, U_2 et U_3 étant -1, 1 et 3 respectivement, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \cdot P_1 + 1^n \cdot P_2 + 3^n \cdot P_3$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{-t} \cdot P_1 + e^{t} \cdot P_2 + e^{3t} \cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA).X(0) = e^{-t} \cdot P_1 X(0) + e^{t} \cdot P_2 X(0) + e^{3t} \cdot P_3 X(0).$$

✍ *Cette méthode pour calculer $\exp(tA)$ est préférable à la précédente (cet avis n'engage que moi).*

Solution 30

On utilise les notations habituelles pour les vecteurs de la base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ **Analyse**

► Si une telle matrice A existe, alors $A^4 = (A^2)^2 = 0_3$, donc A est nilpotente et son indice de nilpotence est strictement supérieur à 2. Comme l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est inférieur à 3, on en déduit que l'indice de nilpotence de A est égal à 3 et donc que $A^3 = 0_3$.

En particulier, la matrice A n'est pas inversible, $\dim \operatorname{Ker} A \geqslant 1$ et

$$\mathbb{R} \cdot E_1 = \operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$$

puisque $A^3 = A \times A^2 = 0_3$.

► On vient de remarquer que le vecteur E_1 appartient à $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$. Par ailleurs, $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 = [z = 0]$ et $\dim \operatorname{Ker} A \leqslant 2$.

Si $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, alors $\operatorname{rg} A = 1$ (Théorème du rang) et d'après les inclusions précédentes,

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot E_1 \subset [z = 0] = \operatorname{Ker} A.$$

Dans ces conditions, $A^2 = A \times A = 0_3$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et par conséquent

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^2 = \mathbb{R} \cdot E_1.$$

La première colonne de A, égale à AE_1, est donc la colonne nulle.

► La deuxième colonne de A^2, égale à $A^2E_2 = A(AE_2) = 0$, nous dit que AE_2 (la deuxième colonne de A) appartient au noyau de A. Elle est donc proportionnelle à E_1 : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$AE_2 = \alpha E_1$$

et comme $E_2 \notin \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot E_1$, le scalaire α ne peut pas être nul.

► Enfin, la troisième colonne de A^2 vérifie :

$$E_1 = A^2E_3 = \frac{1}{\alpha} AE_2$$

et par conséquent

$$A\Big(AE_3 - \frac{1}{\alpha}E_2\Big) = 0.$$

Connaissant le noyau de A, on en déduit qu'il existe donc un réel β tel que

$$AE_3 - \frac{1}{\alpha}E_2 = \beta E_1.$$

Il existe donc deux réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ **Synthèse**

Il est clair que

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient les réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Solution 31

1. On a supposé que $A + A^3 = 0_3$. Si la matrice A était inversible, on pourrait en déduire que $I_3 + A^2 = 0_3$ et donc que

$$\det(A^2) = \det(-I_3) = (-1)^3 = -1.$$

Or $\det(A^2) = (\det A)^2$ et comme $\det A \in \mathbb{R}$, il est impossible que $(\det A)^2 = -1$. Donc la matrice A n'est pas inversible.
2. Le polynôme $X + X^3 = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de f et les facteurs X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux (ils sont irréductibles et ne sont pas associés). Le Théorème de décomposition des noyaux donne directement

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + I).$$

3. On a démontré que la matrice A n'était pas inversible. Comme f (représenté par A) est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la non-inversibilité de f prouve la non-injectivité de f (Théorème du rang). Autrement dit, $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$.
4. Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, il existe un vecteur non nul ε_1 dans Ker f.

Comme $f \neq \omega_E$, le sous-espace $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et il existe donc un vecteur non nul ε_2 dans $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$.

Le sous-espace $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$ est stable par f (c'est le noyau d'un polynôme en f), donc le vecteur $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$ appartient aussi à $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$.

Si $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ était liée, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3 = \lambda \cdot \varepsilon_2,$$

donc ε_2 serait un vecteur propre de f associé à λ. Mais comme $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + I)$, on aurait aussi

$$-\varepsilon_2 = f^2(\varepsilon_2) = \lambda^2 \cdot \varepsilon_2$$

et donc $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible. On a donc une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$.

Comme les deux sous-espaces Ker f et $\operatorname{Ker}(f^2 + I)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, que $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ et que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + I) \geqslant 2$, on a donc

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(f^2 + I) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

ce qui prouve que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base la matrice de f est bien égale à B : les matrices A et B sont donc semblables.

Solution 32

1. a. Comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie égale à 2n, on déduit du théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Ker} u = 2n - \operatorname{rg} u = n. \tag{6}$$

Par ailleurs, comme $u^2 = 0$, on a aussi

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u. \tag{7}$$

On a établi une inclusion et l'égalité des dimensions (finies !), donc les deux sous-espaces sont égaux :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u. \tag{8}$$

1. b. Comme la dimension de Im u est égale à n, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de Im u et, par définition de l'image, il existe une famille $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ de vecteurs tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad e_k = u(e_{n+k}).$$

Vérifions la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est bien une base de $\mathbb{R}^{2n}$: pour des raisons de dimension, il suffit de prouver que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Si les scalaires λ_k $(1 \leqslant k \leqslant 2n)$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0, \tag{9}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u(e_{n+k}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0.$$

Par linéarité de u et comme $u^2 = 0$,

$$0 = \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

Par construction, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est *libre*, donc les scalaires λ_{n+1}, ..., λ_{2n} sont tous nuls. Il ne reste de (9) que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot e_k = 0.$$

À nouveau, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc les scalaires λ_1, ..., λ_n sont tous nuls : on a prouvé que $\mathscr{B}$ était une famille et (donc) une base de $\mathbb{R}^{2n}$.

❧ Comme $u^2 = 0$,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u(e_k) = u^2(e_{n+k}) = 0.$$

D'autre part, par définition de la famille $\mathscr{B}$,

$$\forall\, n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \quad u(e_{n+k}) = e_k.$$

Donc la matrice de u relative à cette base $\mathscr{B}$ est bien la matrice voulue.

2. a. D'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^{3n} - \operatorname{rg} u = 3n - 2n = n. \tag{10}$$

Comme $u^3 = u \circ u^2 = 0$, il est clair que

$$\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u \tag{11}$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u = n. \tag{12}$$

Comme $\operatorname{Ker} u$ est un espace de dimension n (10) contenu dans $\operatorname{Ker} u^2$, il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\operatorname{Ker} u$ et on peut compléter cette base pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} u^2$:

$$\operatorname{Vect}(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}_{\text{base de Ker } u}, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \tag{13}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \tag{14}$$

La famille $\big(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r)\big)$ est libre : en effet, si

$$\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot u(\varepsilon_k) = 0,$$

alors

$$u\Big(\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot \varepsilon_k\Big) = 0.$$

Dans ces conditions, la combinaison linéaire

$$\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot \varepsilon_k$$

appartient à la fois à $\operatorname{Ker} u$ et à $\operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$, alors que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Par conséquent, cette combinaison linéaire est nulle et comme la famille $(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$ est libre, on en déduit que les scalaires λ_{n+1}, ..., λ_r sont tous nuls.

Comme $u^2 = 0$, la famille $\big(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r)\big)$ est une famille libre de $(r-n)$ vecteurs dans $\operatorname{Ker} u$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u = n$ par (10), on en déduit que $(r-n) \leqslant n$, c'est-à-dire

$$\dim \operatorname{Ker} u^2 = r \leqslant 2n. \tag{15}$$

D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} u^2 = \dim \mathbb{R}^{3n} - \dim \operatorname{Ker} u^2 \geqslant 3n - 2n = n \tag{16}$$

et d'après (12) et (10), on a donc

$$\operatorname{rg} u^2 = n = \dim \operatorname{Ker} u. \tag{17}$$

Avec l'inclusion (11) et l'égalité des dimensions, on a prouvé que

$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u.$$

2. b. Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Im} u^2$. Il existe donc une famille $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k = u^2(e_{2n+k})$$

et on pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_{n+k} = u(e_{2n+k}).$$

On vient de définir une famille

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{3n}) \\ &= \big(u^2(e_{2n+1}), \dots, u^2(e_{3n}), u(e_{2n+1}), \dots, u(e_{3n}), e_{2n+1}, \dots, e_{3n}\big). \end{aligned}$$

Il suffit bien entendu de vérifier que cette famille est libre pour démontrer que c'est une base de $\mathbb{R}^{3n}$. Considérons donc une relation de liaison :

$$0 = \sum_{k=1}^{3n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2n+k} \cdot e_{2n+k}$$

et appliquons u^2 : comme $u^3 = 0$, il reste seulement

$$0 = \sum_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k \cdot u^2(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2n+k} \cdot e_k$$

et comme la sous-famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre par construction, on en déduit que $\lambda_{2n+1} = \cdots = \lambda_{3n} = 0$. Il reste alors

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k})$$

et on applique u. Comme $u^3 = 0$,

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u^2(e_{2n+k}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

On obtient, comme précédemment, ainsi que $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$. Il reste donc seulement

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k = 0$$

d'où on déduit enfin que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

❧ Comme $u(e_1) = u^3(e_{2n+1}) = 0$, …, $u(e_n) = u^3(e_{3n}) = 0$ et comme, par construction même,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u(e_{n+k}) = e_k \quad \text{et} \quad u(e_{2n+k}) = e_{n+k},$$

la matrice de u dans cette base a exactement la forme voulue.

Solution 33

1. La première colonne de A nous montre que $1 \in \operatorname{Sp}(A)$. Le rang de la matrice

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $[y - z = 0]$.

La trace de A est égale à 3 et c'est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme 1 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 (= dimension du sous-espace propre), on en déduit que 1 est en fait valeur propre triple.

La multiplicité de la valeur propre 1 étant strictement supérieure à la dimension du sous-espace propre associé à 1, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

2. Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_0$. S'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T,$$

alors le vecteur ε_3 est choisi hors de $\operatorname{Ker}(f - I)$, le vecteur ε_2 est l'image de ε_3 par $f - I$ et le vecteur ε_1 est choisi de telle sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\operatorname{Ker}(f - I)$.

Choisissons $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$. Il faut alors $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) - \varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et on peut choisir $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ (qui vérifie l'équation du plan $\operatorname{Ker}(f - I)$ sans être proportionnel à ε_2).

Il est clair que la matrice

$$P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui prouve que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, par construction des vecteurs ε_k, on a bien

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \qquad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \qquad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ce qui prouve que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$.

Les matrices A et T sont donc bien semblables.

3. D'après ce qui précède, $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n \overset{(\star)}{=} PT^nP^{-1}.$$

On vérifie facilement (récurrence, binôme...) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nT - (n-1)I_3.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n \overset{(\star)}{=} nA - (n-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & -n \\ 0 & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

✍ *On a utilisé deux fois $(\star)$ le fait que l'application $[M \mapsto PMP^{-1}]$ est un morphisme d'algèbres.*

4. On a déjà défini la matrice N. Il est clair que N est nilpotente d'indice 2 (c'est-à-dire $N \neq 0_3$ et $N^2 = 0_3$). Comme toute matrice commute à I_3, on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + \binom{n}{1}N^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN.$$

✍ *Ce n'est vraiment pas très différent des calculs qui précèdent...*

Solution 34

1. Par définition, le noyau de f_a contient les vecteurs $e_1 - e_3$ et e_2. Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, les vecteurs

$$\varepsilon_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

sont linéairement indépendants, donc $\dim \operatorname{Ker} f_a \geqslant 2$.

Par ailleurs, le vecteur

$$\varepsilon_3 = f_a(e_1) = a \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - a \cdot e_3 = a \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$$

n'est pas nul (en tant que combinaison linéaire d'une famille libre dont les coefficients ne sont pas tous nuls) et appartient à l'image de f_a. Donc le rang de f_a est au moins égal à 1.

D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f_a = \mathbb{C} \cdot (a \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

2. La matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3) est égale à

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

La matrice de f_a dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$ est égale à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, ces deux matrices sont semblables.
3. Il est clair que $(A')^2 = 0_3$. Comme A et A' sont semblables, $A^2 = 0_3$.

✍ *On pouvait aussi remarquer que* $\operatorname{Im} f_a \subset \operatorname{Ker} f_a$ *pour conclure encore plus vite.*

La matrice A est donc nilpotente. Comme elle n'est pas nulle, elle est donc nilpotente d'indice 2 : son polynôme minimal est égal à X^2 et son polynôme caractéristique à X^3.
4. Puisque A est nilpotente, son spectre est égal à $\{0\}$. Cette matrice n'est donc pas inversible.
Si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle et donc en fait *égale* à la matrice nulle. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Solution 35

1. Il est clair que ψ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. De plus,

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \deg P' \leqslant \deg P$$

donc

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg \psi(P) \leqslant \max\{\deg P, \deg P'\} \leqslant \deg P \leqslant n$$

donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: l'application ψ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Il est clair que $\psi(1) = 1$ et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \psi(X^k) = X^k + kX^{k-1},$$

donc

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible.
3. Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\operatorname{Sp} \psi = \{1\}$.
Pour $n \geqslant 2$, la matrice est distincte de I_n, donc elle n'est pas diagonalisable.

✍ *La seule matrice semblable à la matrice identité* I_n *est la matrice* I_n *elle-même.*
De ce fait, la seule matrice diagonalisable dont le spectre soit réduit à $\{\lambda\}$ *est la matrice* λI_n*, matrice de l'homothétie de rapport* λ*.*

En revanche, pour $n = 1$, elle est diagonale (*soupir*).

Solution 36

1. L'hypothèse faite sur A peut se traduire matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Par conséquent, si $AX = Y$, alors

$$UY = U(AX) = (UA)X = UX$$

c'est-à-dire : $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2. D'après la question précédente,

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

avec $y_1 + y_2 = 1 - 1 = 0$, donc

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cela prouve que le vecteur (**non nul!**) $(1, -1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre y_1. D'après les coefficients de A, la valeur propre y_1 est aussi égale à $(a - b)$.

3. Si $V = (x_1, x_2)$ est un vecteur propre de A, alors

$$AV = \lambda \cdot V,$$

donc $x_1 + x_2 = \lambda \cdot (x_1 + x_2)$. Si V n'est pas colinéaire à $(1, -1)$, alors $x_1 + x_2 \neq 0$ et par conséquent $\lambda = 1$.

✍ *La trace de A est égale à $a + d = a + (1 - b) = (a - b) + 1$: c'est bien la somme des deux valeurs propres qu'on a trouvées.*

Solution 37

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 2-\lambda & 5-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 3 & -\lambda \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)\\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}\\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}\right)\\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique de A est $(X-2)^2(X-4)$: le spectre de A est égal à $\{2; 4\}$. Les matrices

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

sont toutes les deux de rang 1, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Ces matrices nous indiquent que

$$\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}(A - 4I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

2. Comme $(X-2)$ et $(X-4)$ sont scindés et n'ont pas de racine commune, ils sont premiers entre eux, donc $(X-2)^2$ et $(X-4)$ sont premiers entre eux et, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - 4I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2. \tag{$\star$}$$

La matrice

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nous indique que $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2$ est le plan d'équation $[2x - y - z = 0]$. Comme le vecteur $(0, 1, -1)$ appartient à ce plan sans être colinéaire au vecteur $(1, 1, 1)$ (qui dirige $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$), on dispose d'une base de $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2$.

❧ On constate que

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible : c'est la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à la décomposition ($\star$), constituée d'un vecteur propre ε_1 associé à 4 ; d'un vecteur propre ε_2 associé à 2 et d'un vecteur ε_3 tel que

$$(A - 2I_3)(\varepsilon_3) = \varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\varepsilon_3 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_3.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

❧ Si B est une matrice telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \alpha \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et il suffit de choisir $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir

$$P^{-1}B^2P = P^{-1}AP$$

et donc $B^2 = A$.

✍ *Pour ceux qui attachent de l'importance à ces détails,*

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

et le calcul explicite de B *est particulièrement pénible.*

✍ *On a une excellente raison de chercher* $P^{-1}BP$ *sous forme triangulaire.*

En effet, si $B^2 = A$*, alors* $A.B = B^3 = B.A$*, donc* chaque sous-espace propre de A est stable par B *et comme ces sous-espaces sont des* droites, *les vecteurs* ε_1 *et* ε_2 *qui les dirigent sont en fait des vecteurs propres de* B. *Ainsi,* $P^{-1}BP$ *est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Mais de plus chaque sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)^m$ de A est stable par B *(cette notion n'est pas au programme), donc* $P^{-1}BP$ *est diagonale par blocs :*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Cela nous indique sous quelle forme chercher $P^{-1}BP$ *et nous assure qu'il n'y a pas beaucoup d'autres solutions que celle qu'on vient d'exhiber.*

3. Si B était diagonalisable, alors $B^2 = A$ serait aussi diagonalisable : aucune des solutions de l'équation n'est donc diagonalisable.

Solution 38

1. a. Supposons que A soit inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - BA) &= \det(\lambda A^{-1} - B).\det A \\ &= \det A.\det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda I_n - AB).\end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc ensemble *infini*), on en déduit que le polynôme caractéristique de AB est égal au polynôme caractéristique de BA.

1. b. On sait que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (toute matrice A est limite d'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles) et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les applications

$$[A \mapsto \det(\lambda I_n - AB)] \quad \text{et} \quad [A \mapsto \det(\lambda I_n - BA)]$$

sont continues (ce sont des applications polynomiales en fonction des coefficients de A).

Comme ces deux applications sont égales sur $GL_n(\mathbb{K})$, elles sont aussi égales sur l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Autrement dit, quelles que soient les matrices A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

2. a. En choisissant une base $\mathscr{B}$ (quelconque !) de E, et en notant A et B, les matrices qui représentent f et g dans la base $\mathscr{B}$, on déduit de la question précédente que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Comme λ est, par définition, une valeur propre de $f \circ g$, on en déduit que λ est aussi une valeur propre de $g \circ f$.

❧ Soit $x \in E_\lambda$. Alors $(f \circ g)(x) = \lambda x$ (par définition de E_λ). On en déduit que

$$g\big[(f \circ g)(x)\big] = \lambda g(x),$$

c'est-à-dire

$$(g \circ f)\big[g(x)\big] = \lambda \cdot g(x)$$

ou encore que $g(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(g \circ f - \lambda I) = F_\lambda$.

De la même façon, on démontre que

$$\forall\, y \in \operatorname{Ker}(g \circ f - \lambda I), \qquad f(y) \in \operatorname{Ker}(f \circ g - \lambda I).$$

2. b. Si $x \in E_\lambda$ et $g(x) = 0_E$, alors

$$\lambda \cdot x = (f \circ g)(x) = f(0_E) = 0_E.$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $x = 0_E$. Autrement dit, en restriction à E_λ, l'endomorphisme g est injectif et par conséquent

$$\dim g(E_\lambda) = \dim E_\lambda.$$

D'après l'inclusion précédente, $\dim E_\lambda \leqslant \dim F_\lambda$.

On démontre de la même manière que $\dim F_\lambda \leqslant \dim E_\lambda$ et donc que les deux sous-espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

✍ *Si A est inversible, alors $AB = A(BA)A^{-1}$ et cette égalité toute simple montre que AB et BA sont semblables. Dans ce cas, il est clair que les polynômes caractéristiques sont égaux et que les sous-espaces propres sont deux à deux isomorphes !*

Solution 39

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\det(xI_6 - B) &= \begin{vmatrix} xI_3 - \alpha A & -\beta A \\ -\gamma A & xI_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ xI_3 - \gamma A & xI_3 \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \text{ avec } \alpha + \beta = \gamma) \\ &= \begin{vmatrix} xI_3 - \gamma A & -\beta A \\ 0_3 & xI_3 + \beta A \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\end{aligned}$$

et par conséquent, comme $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$,

$$\det(xI_6 - B) = \det(xI_3 - \gamma A)\det(xI_3 + \beta A) = (-\beta\gamma)^3 \chi_A\Big(\frac{x}{\gamma}\Big)\chi_A\Big(\frac{-x}{\beta}\Big)$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

❧ Comme le rang de A est égal à 1, son noyau est de dimension 2 (Théorème du rang). Et comme A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est de la forme

$$\chi_A = X^2(X-a)$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$. Le polynôme caractéristique de B est donc égal à

$$X^4(X-a\gamma)(X+a\beta).$$

Comme $a \neq 0$ et que $\beta+\gamma \neq 0$, la matrice B admet donc trois valeurs propres distinctes : 0 (de multiplicité 4), $a\gamma$ (simple) et $-a\beta$ (simple).

✍ *D'après le cours, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (c'est le cas pour* B*) et si la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.*

Par ailleurs, on sait que la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 *et la multiplicité de la valeur propre.*

Par conséquent, la matrice B *est diagonalisable si, et seulement si, la dimension du sous-espace propre* $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}(B - 0I_6)$ *est égale à* 4.

2. On suppose que $AX = 0$. D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$B\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha AX \\ \gamma AX \end{pmatrix} = 0.$$

❧ Pour les mêmes raisons,

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta AX \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Par hypothèse, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, donc il existe deux colonnes linéairement indépendantes X_1 et X_2 telles que $\ker A = \operatorname{Vect}(X_1, X_2)$. On déduit des calculs précédents que les colonnes

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de B. Comme X_1 et X_2 sont linéairement indépendantes, on en déduit facilement que ces quatre colonnes sont linéairement indépendantes et donc que $\dim \operatorname{Ker} B \geqslant 4$.

3. Comme la dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} B = 4$ et que B est diagonalisable.

Solution 40

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A \geqslant 2$. Les colonnes C_2, …, C_n sont proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A = 2$.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes, donc $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$.

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral).

3. Pour une matrice diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Par conséquent, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à $(n-2)$.

✍ *En général, la multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.*

4. Comme le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A, que ce polynôme admet 0 pour racine de multiplicité $(n-2)$ et que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (puisque A est diagonalisable), on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta).$$

Or la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$1 = \operatorname{tr} A = (n-1) \times 0 + 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta$$

donc $\alpha + \beta = 1$: on peut donc noter λ et $(1-\lambda)$, les deux valeurs propres non nulles de A.

✍ *Pour l'instant, on ne sait pas si* $\lambda \neq 1/2$*, donc rien ne prouve que ces deux valeurs propres soient distinctes.*

5. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Donc

$$\mu_A = X(X-\lambda)(X-1+\lambda) \quad \text{ou} \quad \mu_A = X(X-1/2)$$

(selon que $\lambda \neq 1/2$ ou $\lambda = 1/2$). Par définition, le polynôme minimal est un polynôme annulateur.

Dans les deux cas, le polynôme

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda)$$

est un multiple du polynôme minimal et donc un polynôme annulateur.

✍ *En calculant les coefficients diagonaux de* A^2*, on trouve que*

$$\operatorname{tr}(A^2) = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + \sum_{k=2}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

Comme A *est diagonalisable, on sait aussi que*

$$\operatorname{tr}(A^2) = (n-2)\cdot 0^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Donc les valeurs propres λ *et* $(1-\lambda)$ *sont les deux racines de l'équation*

$$2X^2 - 2X + 1 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

On en déduit d'une part que

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X\cdot\Big(X^2 - X + 1 - \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\Big)$$

et d'autre part que $\lambda \neq 1/2$ *(puisque le terme constant, égal au produit des racines, est toujours négatif).*

Pour ceux que ce genre de précisions vaines amusent, les valeurs propres λ *et* $1-\lambda$ *sont*

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(1 \pm \sqrt{\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3} - 3}\Big).$$

Solution 41

1. La matrice M admet $X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Or les valeurs propres de M se trouvent parmi les racines de tous les polynômes annulateurs de A, donc

$$\operatorname{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}.$$

2. On distingue deux cas.

❧ Si la matrice M est inversible, alors $M^2 = 4I_3$, donc elle admet le polynôme $(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme est scindé et que ses racines sont simples, on en déduit que la matrice M est diagonalisable.

❧ Si la matrice M n'est pas inversible, alors 0 est une valeur propre de M. Par conséquent, elle admet trois valeurs propres distinctes : 0, -2 et 2 et comme elle appartient à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable.

✍ *En dimension* $n \geqslant 4$*, on ne pourrait pas conclure puisque les deux matrices suivantes vérifient les hypothèses de l'exercice :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que seule la première est diagonalisable.

Solution 42

1. Si $MX = \lambda X$, alors $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par récurrence à partir de $k=1$) et, par combinaison linéaire, $P(M)X = P(\lambda).X$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P est un polynôme annulateur, alors $P(\lambda).X = 0$ et si λ est une valeur propre, alors on peut choisir $X \neq 0$ (qui est alors un vecteur propre de M associé à λ) et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

2. Si M est symétrique, alors l'équation devient $M^2 + M - I_n = 0_n$. Dans ce cas, la matrice M admet $P_2 = X^2 + X - 1$ pour polynôme annulateur. Comme $\Delta = 5 \neq 0$, ce polynôme est scindé à racines simples et comme la matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.

✍ *Comme M est une matrice à coefficients* complexes, *il est hors de question d'appliquer le Théorème spectral pour conclure.*

❧ Comme 0 n'est pas une racine du polynôme annulateur X^2+X-1, ce n'est pas non plus une valeur propre de M, donc la matrice M est inversible et son déterminant n'est pas nul.
❧ Comme M est diagonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. D'après le polynôme annulateur, il y a au plus deux valeurs propres, de multiplicités respectives $m \in \mathbb{N}$ et $(n-m) \in \mathbb{N}$. Donc

$$\operatorname{tr} M = m \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + (n-m) \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-n}{2} + \frac{(2n-m)\sqrt{5}}{2}.$$

Si la trace de M était nulle, alors on aurait

$$\sqrt{5} = \frac{n}{2n-m} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux. Donc $\operatorname{tr} M \neq 0$.

3. D'après l'équation, $M^\top = I_n - M^2$. En transposant l'équation,

$$I_n = M + (M^\top)^2 = M + (I_n - M^2)^2$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0_n &= (I_n - M^2)^2 - (I_n - M) \\ &= (I_n - M)\big[(I_n - M)(I_n + M)^2 - I_n\big] \\ &= (I_n - M)M(I_n - M - M^2). \end{aligned}$$

La matrice M admet donc $P_4 = (1-X)X(X^2+X-1)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples :

$$1, \quad 0, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

donc la matrice M est diagonalisable.

4. D'après l'équation,

$$M^\top = (I_n - M)(I_n + M).$$

On sait que M est inversible si, et seulement si, $M^\top$ est inversible.

Comme -1 n'est pas une valeur propre de M (ce n'est pas une racine de P_4), on en déduit que (I_n+M) est inversible. Par conséquent, $M^\top$ est inversible si, et seulement si, $(I_n - M)$ est inversible.

Autrement dit : M est inversible si, et seulement si, $1 \notin \operatorname{Sp}(M)$.

✍ *L'alternative est donc la suivante : ou bien*

$$\operatorname{Sp}(M) \subset \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\},$$

ou bien

$$\{0, 1\} \subset \operatorname{Sp}(M) \subset \left\{0,\ 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Solution 43

1. Il est clair que $A^0C = C = CB^0$ et, par hypothèse, $A^1C = CB^1$.
S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^kC = CB^k$, alors

$$A^{k+1}C = A.A^kC \overset{HR}{=} A.CB^k = AC.B^k = CB.B^k = C.B^{k+1}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $A^kC = CB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par combinaison linéaire, on en déduit que $P(A).C = C.P(B)$ pour tout polynôme P.

2. Quelles que soient les matrices $M_1, \dots, M_r$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(M_1 \cdots M_r) = \prod_{k=1}^{r} \det M_k \in \mathbb{C}.$$

Un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul et le produit de matrices $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Par conséquent, le produit $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, $\det M_k \neq 0$ pour tout k, c'est-à-dire si toutes les matrices M_k sont inversibles.

❧ Supposons que le spectre de A et le spectre de B soient des parties disjointes de $\mathbb{C}$ et notons P, le polynôme caractéristique de B. En tant qu'élément de $\mathbb{C}[X]$, ce polynôme P est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)^{m_k}.$$

Comme $P(B) = 0_n$ (Théorème de Cayley-Hamilton), on déduit de ce qui précède que

$$P(A).C = C.P(B) = 0_n$$

alors que la matrice

$$P(A) = (A - \mu_1)^{m_1} \times \cdots \times (A - \mu_r)^{m_r}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles (les valeurs propres μ_k de B ne sont pas des valeurs propres de A !). On en déduit que $C = 0_n$, ce qui est impossible par hypothèse.

On a démontré par l'absurde que les matrices A et B admettaient une valeur propre commune.

3. Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ commune aux matrices A et B. Par définition, ni la matrice $(A - \lambda I_n)$, ni la matrice $(B - \lambda I_n)$ ne sont inversibles.

D'après le Théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ est au moins égale à 1 et la dimension de $\operatorname{Im}(B - \lambda I_n)$ est au plus égale à $(n - 1)$. Par conséquent, il existe une matrice $C \neq 0_n$ telle que

$$\operatorname{Im}(B - \lambda I_n) \subset \operatorname{Ker} C \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} C \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

✍ *Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une famille libre de cardinal $r < n$, on peut la compléter en une base $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E.*
Si $(u_1, \dots, u_q)$ est une famille libre de cardinal $q \geqslant 1$, alors il existe un endomorphisme φ de E tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \varphi(\varepsilon_k) = 0_E \quad \textit{et} \quad \forall\, r < k \leqslant n, \quad \varphi(\varepsilon_k) = u_1.$$

Il est clair que $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \subset \operatorname{Ker} \varphi$ et que $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{C} \cdot u_1 \subset \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_q)$; en particulier, φ n'est pas l'endomorphisme nul.

On en déduit que $C.(B - \lambda I_n) = 0_n = (A - \lambda I_n).C$ et donc, après développement et simplification, que $CB = AC$.

Solution 44

1. Par définition,

$$M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1.A^0.B \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0.B \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

✍ *Sans l'hypothèse $AB = BA$, la démonstration par récurrence ne serait pas possible !*

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A).B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, P est un polynôme annulateur de M si, et seulement si, $P(A) = P'(A).B = 0_n$.

❧ Si M est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur P qui est scindé à racines simples.

Si P et P' admettaient un facteur irréductible commun, ce serait un facteur de la forme $(X - \alpha)$ (irréductible dans $\mathbb{C}[X]$!) et dans ce cas, α serait une racine (au moins) double de P : c'est impossible. Par conséquent, P et P' sont premiers entre eux.

On déduit alors de la relation de Bézout que la matrice $P'(A)$ est inversible et donc que $B = 0_n$.

❧ Réciproquement, si A est diagonalisable et si $B = 0_n$, alors A admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples et

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & O_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

donc P est aussi un polynôme annulateur de M, ce qui prouve que M est diagonalisable.

✍ *Variante : si $Q^{-1}AQ = \Delta$, alors*

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}.$$

Solution 45

Comme les matrices A et $A^\top$ commutent,

$$B^p = (A^\top)^p.A^p = 0_n.$$

Or la matrice B est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral). Étant diagonalisable et n'admettant que 0 pour valeur propre, la matrice B est donc nulle.

Pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$0 = X^\top.B.X = (AX)^\top.(AX) = \|AX\|^2.$$

Par conséquent, $AX = 0$ pour *toute* matrice colonne X et donc $A = 0_n$.

Solution 46

1. Version longue (en récitant le cours)

Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il n'y a que trois possibilités :
- ou bien son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (soit $\Delta > 0$) ;
- ou bien il admet une racine double (soit $\Delta = 0$) ;
- ou bien il est irréductible (soit $\Delta < 0$).

Autrement dit :
- ou bien cette matrice admet deux valeurs propres distinctes et, dans ce cas, elle est diagonalisable ;
- ou bien elle n'a qu'une seule valeur propre :

  $$\chi_A = (X - \lambda)^2$$

  et dans ce cas,
  - ou bien cette matrice est une homothétie : $A = \lambda I_2$ (ce n'est pas le cas ici) ;
  - ou bien cette matrice est trigonalisable mais pas diagonalisable ;
- ou bien elle n'est même pas trigonalisable.

Ici, le polynôme caractéristique de A est égal à

$$X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

et par conséquent A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

❧ **Version courte**

La trace de A est égale à 2. Comme la trace est aussi la somme des deux valeurs propres, cela *suggère* d'étudier le cas $\lambda = 1$. Or la matrice

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, donc 1 est bien valeur propre de A.

D'après la trace, 1 est donc la seule valeur propre de A, ce qui prouve que A est trigonalisable (le polynôme caractéristique est scindé et admet 1 comme racine double), mais pas diagonalisable (sinon, A serait semblable à I_2 et donc en fait égale à I_2).

2. D'après l'expression de $A - I_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_2) \quad \text{et} \quad (A - I_2)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et comme

$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

✍ *On sait que* $(A - I_2)^2 = 0_2$ *et donc que*

$$\mathrm{Im}(A - I_2) \subset \mathrm{Ker}(A - I_2).$$

Quel que soit le vecteur ε_2 *choisi, on aura forcément*

$$(A - I_2)(\varepsilon_2) \in \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$$

et donc

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1.$$

Si $\alpha = 0$*, alors* $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$*, donc* ε_2 *serait proportionnel à* ε_1 *: ce serait un mauvais choix !*

En conséquence, quel que soit ε_2 ***non proportionnel*** *à* ε_1*, la famille* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est une base et, d'après la formule du changement de base, la matrice* A *est alors semblable à*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inutile de s'inquiéter, on est sûr de trouver une matrice de passage convenable !

3. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel à résoudre peut s'écrire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

En posant alors

$$Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

cette équation équivaut à l'équation

$$Y'(t) = P^{-1}.X'(t) = P^{-1}AP.P^{-1}X(t) = U.Y(t)$$

c'est-à-dire au système suivant.

$$\begin{cases} u' - u = v \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une constante K_2 telle que

$$v(t) = K_2.e^t.$$

La première équation devient alors

$$u'(t) - u(t) = K_2.e^t$$

et il existe une constante K_1 telle que

$$u(t) = K_1.e^t + K_2.te^t.$$

(On rappelle qu'il existe une recette simple pour trouver une solution particulière de l'équation complète : il suffit de l'appliquer.)

En conclusion : (x, y) est une solution du système différentiel étudié si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1e^t + K_2te^t \\ K_2e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2K_1 - K_2).e^t + 2K_2.te^t \\ -K_1.e^t - K_2.te^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_1 - K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} + te^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_2 \\ -K_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

❧ **Variante**

On déduit de la formule du binôme que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = nU + (1 - n)I_2.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = nA + (1-n)I_2 = I_2 + n(A - I_2).$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = e^t \cdot I_2 + te^t \cdot (A - I_2)$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0) = e^t.X(0) + te^t.(A - I_2).X(0).$$

Solution 47

1. Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$\big(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)\big),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

2. En tant que fonctions polynomiales des fonctions x, y et z (qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2\big(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)\big) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I.

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ t \in \mathbb{R}\big\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x+y+z = 1]$ et de la sphère d'équation $[x^2+y^2+z^2 = 1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

✍ ***Variantes***

❧ *Si $AX = \lambda X$, alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent,*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^{N} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \to +\infty} (M_n.X) = \Big(\lim_{N \to +\infty} M_n\Big).X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) = e^{0 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) \\ &= f(0) = 1. \end{aligned}$$

❧ *On peut aussi remarquer que* $g(t) = X(t)^\top.X(t)$.

▶ *On en déduit que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad g'(t) = \left[X'(t)\right]^\top.X(t) + X(t)^\top.X'(t) = \left[A.X(t)\right]^\top.X(t) + X(t)^\top.A.X(t) = X(t)^\top.(-A).X(t) + X(t)^\top.A.X(t) = 0$$

puisque la matrice A *est anti-symétrique.*

▶ *Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme* $X(t) = \exp(tA).X(0)$, *alors*

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad X(t)^\top.X(t) = X(0)^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).X(0) = X(0)^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).X(0) = X(0)^\top.\exp(0_n).X(0) = X(0)^\top.X(0)$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top.X(t)$ *est bien indépendante de* t.

3. La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans $\mathbb{C}$, je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A.

▶ On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

✍ *Le polynôme* $X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$ *est un polynôme annulateur de* A, *c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.*

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \exp(tA) &= I_3 + \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!}\right) \cdot A^2 + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3}\,t)^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) \cdot A - \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3}\,t)^{2p}}{(2p)!}\right) \cdot A^2 \\ &= \left[I_3 - \frac{1}{3}A^2\right] + \frac{\sin\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos\sqrt{3}\,t}{3} \cdot A^2.\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\cos\sqrt{3}\,t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}\,t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x + y + z = 1]$.

Solution 48

1. Le polynôme $X^3 - 2X + 1$ admet 1 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1) = (X - 1)(X - \alpha)(X - \beta)$$

où $\{\alpha, \beta\} = \{(-1 \pm \sqrt{5})/2\}$.

Le polynôme $X^3 - 2X - 4$ admet 2 pour racine évidente. On en déduit que

$$X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2X + 2)$$

et X^2+2X+2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Considérons une base $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice D dans cette base $\mathscr{B}$.

Comme D est diagonale, les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres -1 et 4. Les sous-espaces propres de u sont donc des *droites* vectorielles.

❧ Si un endomorphisme v commute à u, alors tout sous-espace propre de u est aussi stable par v. Par conséquent, les droites $\mathbb{R}\cdot\varepsilon_1$ et $\mathbb{R}\cdot\varepsilon_2$ sont stables par v, ce qui signifie que les vecteurs ε_1 et ε_2 sont aussi des vecteurs propres pour v.

Ainsi, si v commute à u, alors $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est diagonale.

❧ Réciproquement, si la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est diagonale, alors elle commute à D (deux matrices diagonales commutent toujours) et par conséquent les endomorphismes u et v commutent.

En conclusion, les matrices qui commutent à D sont exactement les matrices diagonales.

✍ *Plus généralement, si $D\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, les matrices qui commutent à D sont les matrices diagonales.(Même démonstration !)*

3. Si $M\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^3-2M=D$, alors M et D commutent (puisque toute matrice M commute à tout polynôme en M) et d'après la question précédente, M est une matrice diagonale :

$$M=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}.$$

L'équation $M^3-2M=D$ devient alors

$$\begin{pmatrix} a^3-2a & 0\\ 0 & b^2-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

D'après la première question, il y a trois possibilités pour a : 1, α et β et une seule pour b : 2. Les solutions sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \beta & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est triangulaire, donc ses coefficients diagonaux : -1 et 4 sont ses valeurs propres. En tant que matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et semblable à la matrice D : il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP=D$.

La conjugaison étant un morphisme d'algèbres,

$$\begin{aligned} M^3-2M=A &\iff P^{-1}M^3P-2P^{-1}MP=P^{-1}AP\\ &\iff (P^{-1}MP)^3-2(P^{-1}MP)=D. \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation précédente.

❧ Il est clair que la matrice

$$P_0=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

convient (ses colonnes sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -1 et à 4). Par conséquent, les solutions de $M^3-2M=A$ sont les matrices

$$P_0\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P_0^{-1},\quad P_0\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P_0^{-1},\quad P_0\begin{pmatrix} \beta & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}P_0^{-1}.$$

Solution 49

1. Le rang de (1) (pour $n=1$) et de $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (pour $n=2$) est égal à 1.

À partir de $n=3$, les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles, donc son rang est au moins égal à 2. Les autres colonnes de M sont égales à C_1 ou à C_2, donc le rang de M est en fait égal à 2.

❧ L'image de M est engendrée par les colonnes de M. On en déduit que

$$\operatorname{Im} M=\operatorname{Vect}(C_1,C_2).$$

2. L'image d'un endomorphisme f est (toujours !) un sous-espace stable par f, donc l'endomorphisme g est bien défini. D'après le cours, si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de f à un sous-espace stable quelconque est également diagonalisable.

✍ *Une histoire de polynôme annulateur — mais si, mais si, mais si, vous vous en souvenez...*

❧ Si on ne se contente pas d'une telle réponse, on peut calculer

$$MC_2 = 2 \cdot C_1 = 0 \cdot C_2 + 2 \cdot C_1 \quad \text{et} \quad MC_1 = (n-2) \cdot C_2 + 2 \cdot C_1,$$

donc la matrice de g relative à la base (C_2, C_1) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n-2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est égal à

$$X^2 - 2X + 2(2-n),$$

donc B admet deux valeurs propres distinctes :

$$1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Pour chaque valeur propre λ de g, le sous-espace propre est une droite vectorielle (DEUX valeurs propres distinctes pour un endomorphisme du PLAN $\operatorname{Im} f$) et cette droite vectorielle est dirigée par le vecteur

$$(n-2) \cdot C_2 + \lambda \cdot C_1.$$

✍ *Pour trouver le noyau de $B - \lambda I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une proportion entre les deux colonnes de cette matrice.*

Solution 50

1. En écrivant

$$A + \frac{1}{a} I_3 = \begin{pmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 1/a \end{pmatrix},$$

on constate que cette matrice n'est pas inversible puisque $C_3 = aC_2$. Cela prouve que $-1/a$ est une valeur propre de A et que le vecteur $(0, a, -1)$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2. Il est clair que $\det A = 2$ et que $\operatorname{tr} A = 0$. En considérant A comme une matrice à coefficients *complexes*, il existe deux complexes α et β tels que

$$\frac{-1}{a} + \alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha\beta}{a} = 2.$$

Les deux nombres α et β sont donc les racines du trinôme

$$X^2 + \frac{1}{a} X - 2a.$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$\frac{-1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1+8a^3}\right).$$

✍ *Comme $a > 0$, la première valeur propre est négative et la deuxième est positive. Comme les deux dernières sont distinctes, si A admet une valeur propre double, alors il faut que*

$$\frac{-1}{a} = \frac{1}{2a}\left(1 - \sqrt{1+8a^3}\right)$$

et donc que $a = 1$.

Pour $a = 1$, le sous-espace propre associé à -1 est le plan d'équation

$$[x + y + z = 0]$$

et la droite propre associée à la valeur propre 2 est évidemment la droite $\mathbb{R} \cdot (1,1,1)$ — "évidemment", car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Dans la suite, on supposera donc $a \neq 1$ pour que la matrice A ait trois valeurs propres distinctes.

3. Comme A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. On peut donc déduire du calcul précédent que

$$\operatorname{Ker}\left(A + \frac{1}{a} I_3\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$, l'une des deux autres valeurs propres de A.

✍ *Comme les deux valeurs propres α et β sont en quelque sorte conjuguées l'une de l'autre, on peut effectuer les deux calculs simultanément, en se bornant à savoir que la valeur propre λ vérifie la propriété*

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{a} - 2a = 0$$

c'est-à-dire

$$a\lambda^2 + \lambda - 2a^2 = 0. \tag{$\star$}$$

On sait, par la discussion précédente, que le rang de $A - \lambda I_3$ est égal à 2. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

est nul, alors $\lambda^2 = a$ et on déduit de l'équation $(\star)$ que $a = 1$, cas que nous avons déjà traité. Par conséquent, le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2. Cette matrice est constituée des deux premières lignes de la matrice $(A - \lambda I_3)$, donc

$$(A - \lambda I_3)X = 0 \implies BX = 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) \subset \operatorname{Ker} B$. Or ces deux matrices ont même rang et même nombre de colonnes, donc leurs noyaux ont même dimension (Théorème du rang), donc ces deux matrices ont même noyau.

✍ *La troisième ligne de $A - \lambda I_3$ ne fait que compliquer les calculs sans apporter d'information supplémentaire !*

Or

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a - \lambda^2 & a^2 + \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2)$$

donc le sous-espace propre de A associé à λ est la droite dirigée par la colonne

$$\begin{pmatrix} a + \lambda a^2 \\ a^2 + \lambda \\ \lambda^2 - a \end{pmatrix}.$$

✍ *Il s'agit seulement de résoudre un système triangulaire !*

En conclusion, pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a + \alpha a^2 & a + \beta a^2 \\ a & a^2 + \alpha & a^2 + \beta \\ -1 & \alpha^2 - a & \beta^2 - a \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha + \beta = 1/a$ et $\alpha\beta = -2a$.

Solution 51

1. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Alors il existe une colonne $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$ et donc telle que

$$j \cdot AX = j \cdot (\lambda X), \quad \text{soit} \quad (j \cdot A)X = (j\lambda) \cdot X$$

et comme $X \neq 0$, cela prouve que $j\lambda \in \operatorname{Sp}(jA)$.

✍ *Plus généralement, quel que soit le polynôme P et la valeur propre $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, le scalaire $P(\lambda)$ est une valeur propre de la matrice $P(A)$.*

Comme A et jA sont semblables, elles ont même spectre et par conséquent $j\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

2. Comme A est une matrice à coefficients *complexes*, son spectre n'est pas vide. Il existe donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour A.

D'après la première question, $j\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et, par conséquent, $j^2\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ (en vertu du vieux principe : *Tant que je gagne, je joue*).

Si $\lambda \neq 0$, alors λ, $j\lambda$ et $j^2\lambda$ sont trois valeurs propres deux à deux distinctes de A. Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, c'est impossible.

Par conséquent, $\lambda = 0$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

3. Comme A est une matrice $(2,2)$ à coefficients complexes, son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré 2 et, d'après la question précédente, ce polynôme admet 0 pour seule racine. Donc $\chi_A = X^2$ et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = 0_2$.

4. Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad jA = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices A et jA sont diagonales et ont les mêmes coefficients diagonaux avec les mêmes multiplicité, donc elles sont semblables — et $A \neq 0_3$.

✍ *Pour permuter circulairement les valeurs propres, il suffit de permuter les vecteurs de la base. Une matrice P telle que $P^{-1}AP = jA$ est donc par exemple*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 52

❧ **Cas $\lambda = 0$**

Puisque E est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de $u \circ v$ si, et seulement si, $\det(u \circ v) = 0$. Or

$$\det(v \circ u) = \det v . \det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

✍ ***Variante** sans déterminant.*

Si 0 n'est pas une valeur propre de $v \circ u$, alors $v \circ u$ est injectif, donc u est injectif, donc (Théorème du rang, puisque u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie) u est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et $u \circ v$ est alors injectif (pour la même raison).

❧ **Cas $\lambda \neq 0$**

Soit $x \in E$, un vecteur propre de $u \circ v$ associé à $\lambda \neq 0$:

$$u\big(v(x)\big) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse et $x \neq 0_E$ en tant que vecteur propre). Par conséquent, $v(x) \neq 0_E$ et en composant par v l'égalité précédente, on obtient

$$v\big[u\big(v(x)\big)\big] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)\big(v(x)\big) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme $v(x) \neq 0_E$, on en déduit que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ.

Solution 53

1. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, le degré du polynôme P_k est égal à k, donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (échelonnée en degré).

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} P_n' &= \frac{(X-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)X(X-n)^{n-2}}{n!} = \frac{(X-n)^{n-2}}{n!} \cdot \big[(X-n)+(n-1)X\big] \\ &= \frac{(X-1)\big((X-1)-(n-1)\big)^{(n-1)-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(X-1). \end{aligned}$$

On suppose que $P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k)$ pour un entier $1 \leqslant k < n$ (c'est vrai pour $k=1$ comme on vient de le constater). Alors

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)} = (P_n^{(k)})' &\overset{HR}{=} \big(P_{n-k}(X-k)\big)' = P'_{n-k}(X-k) \\ &= P_{(n-k)-1}\big((X-k)-1\big) && \text{(calcul précédent)} \\ &= P_{n-(k+1)}\big(X-(k+1)\big), \end{aligned}$$

ce qui prouve que notre hypothèse de récurrence est vraie pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

3. a. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg Q'(X+1) = \deg Q' \leqslant \deg Q \leqslant n$$

et comme Φ_n est évidemment linéaire, l'application Φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. b. Il est clair que $\Phi_n(P_0) = P_0$ et que $\Phi_n(P_1) = X-1 = P_1 - P_0$.
D'après la question précédente, pour $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\Phi_n(P_k) = P_k - P_k'(X+1) = P_k - P_{k-1}.$$

3. c. La matrice de Φ_n relative à la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent, Φ_n admet 1 comme seule valeur propre et il est clair sur la matrice que le sous-espace propre associé à 1 est la droite $\mathbb{R} \cdot P_0$ des polynômes constants.

✍ *On peut aussi constater que l'équation $\Phi_n(P) = P$ se traduit par $-P'(X+1) = 0$ et donc $P' = 0$.*

4. Comme 0 n'est pas valeur propre, Φ_n est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
❧ Il est clair que $\Phi_n^{-1}(P_0) = P_0$. D'autre part, comme

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Phi_n(P_k) = P_k - P_{k-1}$$

et que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P_k = P_0 + \sum_{i=1}^{k} (P_i - P_{i-1}) = \Phi_n(P_0) + \sum_{i=1}^{k} \Phi_n(P_i) = \Phi_n\Big(\sum_{i=0}^{k} P_i\Big),$$

alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Phi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^{k} P_i.$$

✍ *Cette expression est correcte également pour $k = 0$.*

Solution 54

1.

✍ *Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal (resp. son polynôme caractéristique) est scindé. En particulier, si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.*

Puisque l'endomorphisme f est trigonalisable, il admet donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ est stable par g (puisque f et g commutent). L'endomorphisme g_λ, induit par restriction de g à ce sous-espace stable, est donc bien défini.

Comme $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda I) \geqslant 1$, le degré du polynôme caractéristique de g_λ est supérieur à 1. On sait que le polynôme caractéristique de g_λ est un diviseur du polynôme caractéristique de g et comme le polynôme caractéristique de g est scindé, le polynôme caractéristique de g_λ est scindé lui aussi.

Donc g_λ admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{K}$ et il existe un vecteur *non nul* $x_0 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ tel que

$$g(x_0) = g_\lambda(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

Ce vecteur x_0 est donc un vecteur propre commun à f (associé à λ) et à g (associé à μ).

2. a. Par définition, $\operatorname{Im} p = G$, donc

$$\forall\, x \in G, \quad f_1(x) = p\big(f(x)\big) \in G \quad \text{et} \quad f_2(x) = p\big(g(x)\big) \in G.$$

Le sous-espace G est donc stable par f_1 et par g_1.

2. b. Considérons une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

✍ *Une base $\mathscr{B}$ de E est **adaptée** à une décomposition $E = F \oplus G$ lorsqu'elle est obtenue en concaténant une base $\mathscr{B}_F$ de F avec une base $\mathscr{B}_G$ de G.*

Comme le sous-espace F est stable par f et par g et que, d'autre part, p est la projection sur G parallèlement à F,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} A_g & B_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g \end{pmatrix}$$

et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f_1 \circ g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g_1 \circ f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix}.$$

Mais on a supposé que f et g commutaient, donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} A_f A_g & A_f B_g + B_f C_g \\ 0 & C_f C_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g A_f & A_g B_f + B_g C_f \\ 0 & C_g C_f \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f)$$

et on en déduit que $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$.

3. Puisque le sous-espace G est stable par f_1 et par g_1, les endomorphismes $f_2 \in L(G)$ et $g_2 \in L(G)$ induits par restriction sont bien définis.

✍ *On rappelle que les propositions suivantes sont équivalentes.*
- *Un endomorphisme u est trigonalisable;*
- *L'endomorphisme u admet un polynôme annulateur non nul et scindé;*
- *Le polynôme caractéristique de u est scindé;*
- *Le polynôme minimal de u est scindé.*

Soit χ_f, le polynôme caractéristique de f. En calculant dans la base $\mathscr{B}$,

$$\forall\, t \in \mathbb{K}, \qquad \chi_f(t) = \det(tI - A_f) \det(tI - C_f).$$

En calculant dans la base $\mathscr{B}_G$,

$$\forall\, t \in \mathbb{K}, \qquad \chi_{f_2}(t) = \det(tI - C_f)$$

donc χ_{f_2} est un diviseur de χ_f. Comme χ_f est scindé et que $\dim G \geqslant 1$, on en déduit que χ_{f_2} est un polynôme non constant et scindé.

✍ *On a supposé que F était un sous-espace strict de E. Par conséquent,* $\dim F < \dim E$ *et donc* $\dim G \geqslant 1$.

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme χ_{f_2} est un polynôme annulateur de f_2. On en déduit que f_2 est trigonalisable.

❧ Idem pour g_2, évidemment.

4. Si $n = 1$, les matrices de f et g sont triangulaires supérieures (et même diagonales !) dans toute base de E.

HR : supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, quel que soit l'espace vectoriel E de dimension n, quels que soient les endomorphismes f et g de E, si f et g sont trigonalisables et commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont toutes les deux triangulaires supérieures.

Considérons maintenant un espace vectoriel E de dimension $(n+1)$ et deux endomorphismes trigonalisables f et g tels que $f \circ g = g \circ f$.

D'après la première question, il existe un vecteur x_0 qui est un vecteur propre à la fois pour f et pour g. Le sous-espace $F = \mathbb{K} \cdot x_0$ est donc stable pour f et pour g.

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$ et, dans une base $BB = \mathscr{B}_F \oplus \mathscr{B}_G$ de E adaptée à cette décomposition,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & L_f \\ 0 & C_f \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & L_g \\ 0 & C_g \end{pmatrix}.$$

On a démontré précédemment que les endomorphismes f_2 et g_2 induits par restriction à G, sous-espace de dimension n, étaient trigonalisables et commutaient (puisque f_1 et g_1 commutaient).

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{C}_G$ de G dans laquelles les matrices de f_2 et g_2 sont triangulaires supérieures :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_G}(f_2) = C_f, \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}_G}(f_2) = T_f, \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_G}(g_2) = C_g, \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}_G}(g_2) = T_g.$$

On en déduit que les matrices de f et g relatives à la base $\mathscr{C} = \mathscr{B}_F \oplus \mathscr{C}_G$ sont triangulaires supérieures :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_f & \star \\ 0 & T_f \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} a_g & \star \\ 0 & T_g \end{pmatrix}.$$

On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence était héréditaire et la démonstration par récurrence est achevée.

✍ *En notant $P_n \in GL_n(\mathbb{K})$, la matrice de passage de $\mathscr{B}_G$ à $\mathscr{C}_G$, la matrice*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et, en remarquant que

$$P_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix},$$

quelques produits matriciels par blocs nous permettent d'expliciter les matrices de f et g relatives à la base $\mathscr{C}$ en fonction des matrices de f et g relatives à la base $\mathscr{B}$.

✍ ***Variante géométrique***

Un endomorphisme f de E, espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, est trigonalisable si, et seulement si, il existe une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subset\neq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E$$

qui sont tous stables par f.

En particulier, la dimension de E_k est égale à k (quel que soit $0 \leqslant k \leqslant \dim E$).

Pour établir l'hérédité de notre hypothèse de récurrence, on considère $E_1 = \mathbb{K} \cdot x_0$ (stable par f et g) ainsi qu'une famille strictement croissante de sous-espaces vectoriels

$$\{0_E\} \subsetneq G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subsetneq G_{n-1} \subsetneq G_n = G$$

qui sont tous stables par f_2 et par g_2. On vérifie alors que les sous-espaces $E_{k+1} = E_1 \oplus G_k$ sont tous stables par f et g (ce qui n'est pas totalement évident et mérite qu'on pose quelques calculs) et que

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subset\neq \cdots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n \subsetneq E_{n+1} = E.$$

Solution 55

1. Considérons les matrices A et B dont les premières colonnes sont respectivement égales à

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et à} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

toutes les autres colonnes de ces matrices étant nulles. Autrement dit :

$$A = U.U^\top \qquad \text{et} \qquad B = V.U^\top.$$

Il est donc clair que $\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot U$ et $\operatorname{Im} B = \mathbb{R} \cdot V$ et que

$$X \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B \iff U^\top.X = 0.$$

Par conséquent, on a bien $AB = 0_n$ (puisque $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$) mais pas $BA = 0_n$ (puisque $\operatorname{Im} A \not\subset \operatorname{Ker} B$).

2. Comme $AB = 0_n$, on peut démontrer par récurrence que

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} B^{p-k} A^k.$$

✍ *Si l'expression développée est correcte pour $(A+B)^p$, alors*

$$\begin{aligned}
(A+B)^{p+1} &= \left(\sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^k\right) \cdot (A+B) = \sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^{k+1} + \sum_{k=0}^{p} B^{p-k}A^k B \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} B^{(p+1)-k}A^k + \underbrace{B^{p+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^{p} B^{p-k}A^{k-1}.\underbrace{(AB)}_{=0_n} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} B^{(p+1)-k}A^k.
\end{aligned}$$

Pour tout $1 \leqslant k < p$, on a $k-1 \in \mathbb{N}$ et $(p-1-k) \in \mathbb{N}$ et donc

$$\operatorname{tr}(B^{p-k}A^k) = \operatorname{tr}(A^kB^{p-k}) = \operatorname{tr}(A^{k-1}.AB.B^{p-1-k}) = \operatorname{tr}(0_n) = 0.$$

On déduit alors de la linéarité de la trace que

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad \operatorname{tr}[(A+B)^p] = \underbrace{\operatorname{tr} A^p}_{k=p} + \underbrace{\operatorname{tr} B^p}_{k=0}.$$

3. Comme on l'a mentionné, la propriété $AB = 0_n$ équivaut au fait que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} B \leqslant n - \operatorname{rg} A$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leqslant n.$$

Solution 56

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (Théorème spectral).

✍ *La seconde question est la seule intéressante ! Nous allons en présenter deux solutions. Un court rappel pour comprendre la première : si un endomorphisme* u *est diagonalisable, alors*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E).$$

Si u *n'est pas inversible, alors* $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}(u)$ *et si* u *n'est pas identiquement nul, alors il admet au moins une valeur propre non nulle.*

Si λ_0 *est une valeur propre non nulle de* u *et* x_0*, un vecteur propre de* u *associé à* λ_0*, alors*

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot u(x_0) = u\Big(\frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0\Big) \in \mathrm{Im}\, u.$$

Par conséquent,

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \underbrace{\Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)\Big)}_{\subset \mathrm{Im}\, u}.$$

Comme u *est un endomorphisme de* E*, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que*

$$\mathrm{Im}\, u = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

et donc que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$*.*

Une dernière précision : cette dernière propriété n'est pas réservée aux endomorphismes diagonalisables ! On peut démontrer qu'elle équivaut au fait que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ *ou, si on préfère, au fait que le sous-espace propre associé à* 0 *soit égal au sous-espace caractéristique associé à* 0 *ou encore au fait que la multiplicité de* 0 *comme racine du polynôme caractéristique soit inférieure à* 1*.*

Et maintenant, reprenons !

2. Première version : on considère l'endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Il est clair que le rang de u est égal à 2 :

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n,\ e_1)$$

et que, si $n \geqslant 3$,

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u - 0 \cdot I_E) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_2, \ldots, e_n - e_2).$$

(Pour $n = 2$, le noyau de u est réduit au vecteur nul. On y reviendra à la question suivante !)

Comme u est diagonalisable, alors

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$$

et comme le plan $P = \mathrm{Im}\, u$ est stable par u, on peut définir l'endomorphisme $v \in L(P)$ induit par restriction de u au plan P. Les valeurs propres non nulles de u sont alors les valeurs propres de v et les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres non nulles sont les vecteurs propres de v.

Le plan P admet une base naturelle : $\mathscr{B}_P = \big(u(e_1), u(e_2)\big)$ et comme

$$\begin{aligned} u\big(u(e_1)\big) &= u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} u(e_k) = u(e_1) + (n-1)u(e_2) \\ u\big(u(e_2)\big) &= u(e_1), \end{aligned}$$

la matrice de v relative à cette base $\mathscr{B}_P$ est

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de A (c'est-à-dire les valeurs propres de A_P) sont les racines du polynôme

$$X^2 - X - (n-1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette expression moche n'est pas un problème ! En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (qui sont des vecteurs propres aussi bien pour u que pour v, tout est là !) sont représentés dans la base $\mathscr{B}_P$ par les vecteurs non nuls du noyau de

$$A_P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit de regarder la première ligne de cette matrice (dont le rang est égal à 1 puisque λ est une valeur propre de A_P...) pour en déduire que les vecteurs propres de A_P associés à la valeur propre λ sont proportionnels à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot \big[u(e_1) + (\lambda - 1) \cdot u(e_2)\big] = \mathbb{R}\Big[\lambda \cdot e_1 + \sum_{k=2}^{n} e_k\Big].$$

Deuxième version : Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (alias le noyau) est égale à $(n-2)$, la somme des dimensions des autres sous-espaces propres est égale à 2 et il y a donc au plus deux valeurs propres non nulles (peut-être une valeur propre double ?). Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et par conséquent son degré est au plus égal à 3. (De plus, comme $0 \in \operatorname{Sp}(A)$, le terme constant du polynôme minimal est nul.)

On prend le temps de poser le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2n-1 & n & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la famille (I_n, A, A^2) est libre et que

$$A^3 = A^2 + (n-1)A,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - X^2 - (n-1)X.$$

On en déduit sans difficulté les trois valeurs propres de A et les sous-espaces propres comme plus haut.

✍ *La dimension des sous-espaces propres nous permet d'en déduire que le polynôme caractéristique de A est égal à*

$$X^{n-2}\big(X - X - (n-1)\big).$$

3. Comme le rang de A est égal à 2, il n'y a que deux cas possibles :
— si $n \geqslant 3$, alors la matrice A n'est pas inversible et $\det A = 0$;
— si $n = 2$, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$