Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2024/2025

MP

Composition de Mathématiques

Le 18 décembre 2024 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

et on note f*, l'endomorphisme de* $E = \mathbb{R}^3$ *représenté par la matrice* A *dans la base canonique de* E.
L'objectif de cet exercice est d'obtenir de deux manières différentes la ***décomposition de Dunford*** *de la matrice* A*, c'est-à-dire un couple de matrices* (D, N) *tel que*

$$A = D + N$$

où la matrice D *est diagonalisable ; la matrice* N *est nilpotente et les deux matrices* D *et* N *commutent :*

$$DN = ND.$$

1. Démontrer que

$$E = \mathrm{Ker}(f - I_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,I_E)^2.$$

☞ *On explicitera les matrices* $A - I$ *et* $(A - 2I)^2$.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie A. Changement de base

3. Déterminer un vecteur e_1 tel que

$$\mathrm{Ker}(f - I_E) = \mathbb{R} \cdot e_1,$$

puis un vecteur e_2 tel que

$$\mathrm{Ker}(f - 2\,I_E) = \mathbb{R} \cdot e_2$$

et enfin un vecteur e_3 tel que

$$\mathrm{Ker}(f - 2\,I_E)^2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3).$$

4. Démontrer que la famille

$$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$$

est une base de E et expliciter la matrice

$$B = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

5. Donner une matrice diagonale Δ et une matrice nilpotente N_0 telles que

$$B = \Delta + N_0 \quad \text{et} \quad \Delta N_0 = N_0 \Delta.$$

6. En déduire une matrice diagonale D et une matrice nilpotente N telles que

$$A = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND.$$

Partie B. Projecteurs spectraux

7. Décomposer la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$$

en éléments simples.

8. En déduire deux polynômes U et V tels que

$$(X-1)U + (X-2)^2 V = 1$$

avec $\deg U < 2$ et $\deg V < 1$.

Dans la suite de cette partie, on considère les endomorphismes

$$p = (f - 2\,I_E)^2 \circ V(f),$$
$$q = (f - I_E) \circ U(f) \quad \textit{et} \quad d = p + 2q.$$

9. Soit $x \in E$. Que vaut $p(x) + q(x)$?

10. Démontrer que p est la projection sur le sous-espace

$$F = \mathrm{Ker}(f - I_E)$$

parallèlement au sous-espace

$$G = \mathrm{Ker}(f - 2\,I_E)^2.$$

Que peut-on en déduire sur q ?

11. Expliciter la matrice de l'endomorphisme d relative à la base $\mathscr{B}$ déterminée au **[3.]**.

12. En déduire une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N qui commutent et telles que

$$A = D + N.$$

☞ *On exprimera les deux matrices* D *et* N *comme des polynômes en* A.

❖ II – Problème ❖

On considère un entier $n \geqslant 2$.
Étant donnée une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que la matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est ***une racine cubique de*** *A lorsque*

$$B^3 = A.$$

1. On suppose que $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine cubique de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$AB = BA.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que l'équation

$$z^3 = \lambda$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

Partie A. Existence d'une racine cubique

Dans cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres (deux à deux distinctes) sont notées

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$$

(avec $1 \leqslant d \leqslant n$).

3. Quel est le polynôme minimal de A ?
4. Que dire du polynôme caractéristique de A ?
5. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici aux racines cubiques de la matrice $H_p = \lambda I_p$.
5. a. Démontrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que la matrice $P(H_p)$ soit une racine cubique de H_p.
5. b. *Dans cette question seulement*, on suppose que

$$p \geqslant 2.$$

Démontrer qu'il existe une racine cubique de H_p qui n'appartient pas à la sous-algèbre $\mathbb{C}[H_p]$ des polynômes en H_p.
5. c. *Dans cette question seulement*, on suppose que

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad p \geqslant 2.$$

Démontrer qu'il existe une racine cubique de H_p qui n'est pas diagonalisable.
6. Démontrer que la matrice A admet une racine cubique $B \in \mathbb{C}[A]$.

Partie B. Cas d'une matrice inversible

On reprend les notations de la partie précédente, en supposant de plus que la matrice A est inversible.

7. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \qquad \lambda_k \neq 0.$$

8. En déduire que le polynôme

$$Q_0 = \prod_{k=1}^{d} (X^3 - \lambda_k)$$

est scindé à racines simples.
9. Démontrer que toute racine cubique de A est diagonalisable.

❖ III – Problème ❖

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier non nul. On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = 3A^2 - A - I_n.$$

1. Démontrer que

$$A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n.$$

En déduire que le polynôme

$$P_0 = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$$

est un polynôme annulateur de A.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Décomposer le polynôme P_0 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Démontrer que la matrice A est diagonalisable.
5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A et $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, un vecteur propre de A associé à λ. Vérifier que V est aussi un vecteur propre associé à $A^\top$.

On note α_1, α_2, α_3 et α_4, les racines du polynôme P_0 défini plus haut, en convenant que

$$\alpha_1 = 1.$$

On note comme d'habitude $\mathscr{L} = (L_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$, la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces quatre réels distincts.
On rappelle que la famille $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

6. a. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées de R relatives à la base $\mathscr{L}$ en fonction des scalaires α_k, $1 \leqslant k \leqslant 4$.
6. b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que le reste de la division euclidienne de P par le polynôme annulateur P_0 est égal à

$$\sum_{k=1}^{4} P(\alpha_k) L_k.$$

7. En déduire une expression de A^ℓ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer le reste de la division euclidienne de L_k^2 par P_0. En déduire que les matrices $L_k(A)$ sont des matrices de projection.
9. On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$. Démontrer que

$$\lim_{\ell \to +\infty} \|A^\ell - L_1(A)\| = 0.$$

❖ IV – Problème ❖

On note E*, l'espace vectoriel des applications continues par morceaux et bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
On note F*, l'espace vectoriel des applications continues par morceaux et intégrables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
Pour toute application $f \in E$*, on notera*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f(t)\right|$$

et pour toute application $g \in F$*, on notera*

$$\|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|g(t)\right| \, dt.$$

On doit remarquer que ces deux applications $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_1$ *ne sont pas des normes mais des* ***semi-normes*** *: la propriété de séparation des points n'est pas vérifiée.*
Étant données deux fonctions continues par morceaux f *et* g*, on définit le* ***produit de convolution*** $f \star g$ *en posant*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) \, dt.$$

Ce problème a pour but d'établir quelques propriétés du produit de convolution.

Partie A. Propriétés générales

1. Soient $f \in E$ et $g \in F$.
1. a. Démontrer que l'intégrale $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f \star g)(x) = (g \star f)(x).$$

1. c. On suppose ici que la fonction $f \in E$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f \star g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
1. d. En supposant que $f \in E$ est continue sur $\mathbb{R}$, démontrer que $(f \star g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du problème, on ***admettra*** *que l'application* $f \star g$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$*, quelles que soient les applications* $f \in E$ *et* $g \in F$*.*

2. Soit $g \in F$.
2. a. Démontrer que $f \star g \in E$ pour toute application $f \in E$ et que

$$\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \, \|g\|_1.$$

2. b. Démontrer que l'application

$$\mathscr{C}_g = [f \mapsto f \star g]$$

est un endomorphisme de E.

Partie B. Régularisation

3. On considère l'application

$$f_0 = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}.$$

3. a. Vérifier que $f_0 \in E \cap F$.
3. b. On suppose ici que la fonction $g \in F$ est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f_0 \star g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
☞ *On précisera l'expression de la dérivée* $(f_0 \star g)'$*.*
4. On considère une application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A], \quad f_1(x) = 0.$$

4. a. Démontrer que $f_1 \in E \cap F$.
4. b. Démontrer que, quelle que soit l'application $g \in F$, l'application $f_1 \star g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C. Approximation

On admet qu'il existe une application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs positives, telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \quad f(t) = 0$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose alors*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = nf(nt).$$

5. Démontrer que $\varphi_n \in E \cap F$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \, dt = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
6. a. Démontrer que $\varphi_n \star g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
6. b. Démontrer que la suite d'applications $(\varphi_n \star g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ vers la fonction g.

Solution I ❀ Décomposition de Dunford

1. On a

$$A-I=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix},\qquad A-2I=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

et donc

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Première méthode

Il est clair que $\mathrm{rg}(A-I)=2$ et comme $C_2+C_3=0$, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(A-I)=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Il est tout aussi clair que $\mathrm{rg}(A-2I)^2=1$ et donc que

$$\mathrm{Ker}(A-2I)^2=[x-y=0].$$

Pour une matrice de rang 1, chaque colonne non nulle engendre l'image et chaque ligne non nulle porte les coordonnées d'une équation cartésienne du noyau.

Comme le vecteur $(0,1,1)$ ne vérifie pas l'équation cartésienne $[x-y=0]$, la droite $\mathrm{Ker}(f-I_E)$ dirigée par ce vecteur et le plan $\mathrm{Ker}(f-2I_E)^2$ d'équation $[x-y=0]$ sont supplémentaires dans E.

Deuxième méthode

On vérifie sans peine que

$$(A-I)(A-2I)^2=0$$

donc le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de A et donc de f.

Comme les facteurs $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$E=\mathrm{Ker}(f-I_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2I_E)^2.$$

Petits rappels d'arithmétique : si deux polynômes irréductibles P_1 et P_2 ne sont pas associés, alors ils sont premiers entre eux et, par conséquent, quels que soient les entiers naturels m_1 et m_2, les polynômes $P_1^{m_1}$ et $P_2^{m_2}$ sont également premiers entre eux.

2. D'après la question précédente, ni $(A-I)$, ni $(A-2I)$ ne sont inversibles, donc le spectre de A contient 1 et 2.

Réciproquement, le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de A, donc le spectre de A, contenu dans l'ensemble des racines de ce polynôme, est égal à $\{1;2\}$.

Rappel : Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est scindé, alors cet endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, chaque sous-espace propre est égal au sous-espace caractéristique correspondant.

On a remarqué **[1.]** que $\mathrm{rg}(A-2I)=2$, donc

$$\dim\mathrm{Ker}(A-2I)=1<2=\dim\mathrm{Ker}(A-2I)^2$$

et le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f-2I_E)$ est strictement contenu dans le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(f-2I_E)^2$, ce qui prouve que f n'est pas diagonalisable.

Le polynôme minimal de f divise tout polynôme annulateur, donc en particulier il divise $(X-1)(X-2)^2$. Ses racines sont les valeurs propres de f, donc il admet 1 et 2 pour racines. Et comme il est unitaire, il n'y a que deux possibilités :

$$(X-1)(X-2)\quad \textit{ou}\quad (X-1)(X-2)^2.$$

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples et f n'est pas diagonalisable, donc son polynôme minimal est

$$(X-1)(X-2)^2.$$

Partie A. Changement de base

3. D'après les matrices calculées en **[1.]**, les deux sous-espaces propres sont des droites vectorielles et il est clair que les vecteurs

$$e_1=(0,1,1),\quad e_2=(1,1,0),\quad e_3=(0,0,1)$$

conviennent.

Le triplet (e_1,e_2,e_3) n'est pas unique !
Cependant, les sous-espaces propres

$$\mathrm{Ker}(f-I_E)\quad\textit{et}\quad\mathrm{Ker}(f-2I_E)$$

sont des droites vectorielles, donc tous les e_1 possibles sont proportionnels à $(0,1,1)$ et tous les e_2 possibles sont proportionnels à $(1,1,0)$.
Pour e_3, il y a plus de choix : les vecteurs e_3 convenables sont ceux qui vérifient l'équation cartésienne $[x-y=0]$ sans être proportionnels à e_2.

4. Par construction, e_1 est un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Ker}(f-I_E)$ et le couple (e_2,e_3) est une base du plan $\mathrm{Ker}(f-2I_E)^2$.

D'après **[1.]**, cette droite et ce plan sont supplémentaires dans E, donc la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation est une base de E.

On peut, bien entendu, démontrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de E en vérifiant que le rang de la matrice de passage

$$\mathfrak{Mat}_{can}(e_1,e_2,e_3)$$

est égal à 3 — mais c'est maladroit.

❧ Quels que soient les vecteurs e_1 et e_2 choisis, ce sont des vecteurs propres de f, donc

$$f(e_1)=e_1\qquad\text{et}\qquad f(e_2)=2e_2.$$

Quel que soit le vecteur e_3 choisi, il appartient au sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(f-2I_E)^2$, donc

$$(f-2I_E)(e_3) \in \operatorname{Ker}(f-2I_E) = \mathbb{R}\cdot e_2,$$

donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$(f-2I_E)(e_3) = a\cdot e_2.$$

Mais, par construction, $e_3 \notin \operatorname{Ker}(f-2I_E)$, donc

$$(f-2I_E)(e_3) \neq 0_E$$

et $a \neq 0$.
La valeur exacte de a dépend du vecteur e_3 choisi, donc il faut se résoudre à poser le calcul...

D'après la matrice $(A-2I)$, il est clair que

$$(f-2I_E)(e_3) = e_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(e_3) = 2e_3 + e_2.$$

Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. D'après la matrice B trouvée à la question précédente, il est clair que les matrices

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conviennent.

6. Avec la base $\mathscr{B}$ choisie, la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = B = \Delta + N_0,$$

donc

$$A = (P\Delta P^{-1}) + (PN_0P^{-1}).$$

Comme Δ est diagonale, la matrice

$$D = P\Delta P^{-1}$$

est diagonalisable. La matrice $N = PN_0P^{-1}$ est nilpotente :

$$N^2 = PN_0^2P^{-1} = 0_n$$

car $N_0^2 = 0_n$. Enfin, les matrices N et D commutent :

$$ND = P(N_0\Delta)P^{-1} = P(\Delta N_0)P^{-1} = DN$$

car $N_0\Delta = \Delta N_0 = 0_n$.

*On peut démontrer que le couple (D, N) est unique. On trouve donc les mêmes matrices D et N, quels que soient les vecteurs e_1, e_2 et e_3 choisis en **[3.]**.*

L'énoncé est assez vague : faut-il expliciter les deux matrices N et D ?
Dans le doute, allons-y. Il faut d'abord calculer P^{-1}.
*Le plus court consiste à exprimer les vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de la base canonique en fonction des vecteurs e_1, e_2 et e_3 choisis en **[3.]**. (Le plus court, mais peut-être pas le plus évident : si vous êtes plus à l'aise pour inverser P d'une autre manière, faites comme vous préférez.) Comme*

$$\varepsilon_3 = e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_3, \quad \varepsilon_1 = -e_1 + e_2 + e_3,$$

on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et que

$$N = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut évidemment prendre soin de vérifier que les matrices obtenues par le calcul ont les propriétés voulues (spectre, rang, trace...).

Partie B. Projecteurs spectraux

7. On sait qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

L'étude au voisinage de 1 (resp. au voisinage de 2) nous donne $a = 1$ (resp. $c = 1$). Enfin,

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $a + b = 0$ et $b = -1$. Ainsi :

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}.$$

8. D'après **[7.]**,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-1)(X-2)^2} &= \frac{1}{X-1} + \frac{1-(X-2)}{(X-2)^2} \\ &= \frac{(X-2)^2 + (3-X)(X-1)}{(X-1)(X-2)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(X-1)U + (X-2)^2V = 1$$

avec $U = 3 - X$ et $V = 1$.

On peut aussi résoudre l'équation de Bézout de manière traditionnelle avec l'algorithme d'Euclide. C'est très rapide, puisque la première division euclidienne nous donne directement le résultat :

$$(X-2)^2 = (X^2 - 4X + 4) = (X-3)(X-1) + 1.$$

9. Par définition, les matrices des endomorphismes p et q relatives à la base canonique sont

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(p) = (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(q) = (A-I)(3I-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

> *Il faut éviter de développer les polynômes en A ! En les laissant sous forme factorisée, on peut mener les calculs avec les matrices non inversibles obtenues dès la première question, ce qui est souvent beaucoup plus simple.*

On constate alors facilement que la matrice de $p+q$ est la matrice I et donc que

$$\forall\, x \in E, \qquad p(x) + q(x) = x.$$

> *On peut éviter tous ces calculs matriciels en remarquant que la relation*
> $$(X-1)U + (X-2)^2V = 1$$
> *se traduit par*
> $$p + q = (f - 2\,I_E)^2 \circ V(f) + (f - I_E) \circ U(f) = I_E$$
> *d'après la célèbre propriété de morphisme d'algèbres.*

10. La matrice $(A-2I)^2$ calculée en **[9.]** permet de vérifier très facilement que $p^2 = p$ et donc que p est un projecteur.

> *D'après le cours, tout projecteur p est la projection sur le sous-espace* $\operatorname{Im} p$ *parallèlement au sous-espace* $\operatorname{Ker} p$.

Les colonnes de la matrice $(A-2I)^2$ donnent une famille génératrice de l'image de p. En comparant cette matrice aux vecteurs de $\mathscr{B}$ **[3.]**, on en déduit que

$$\operatorname{Im} p = \mathbb{R} \cdot e_1 = \operatorname{Ker}(f - I_E) = F.$$

Comme $p = (f - 2\,I_E)^2$, il est clair que

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(f - 2\,I_E)^2 = G.$$

Donc p est la projection sur F parallèlement à G.

> *On retrouve ici ce qu'on a déjà démontré au **[1.]** : les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E.*

❧ Comme p est la projection sur F parallèlement à G et que $q = I_E - p$ **[9.]**, on sait que q est la projection sur G parallèlement à F.

11. D'après **[10.]** et la définition **[3.]** des vecteurs de $\mathscr{B}$,

$$p(e_1) = e_1, \quad p(e_2) = 0_E, \quad p(e_3) = 0_E$$

et

$$q(e_1) = 0_E, \quad q(e_2) = e_2, \quad q(e_3) = e_3.$$

On en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, par définition de d, que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Comme la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(d)$ est diagonale, la matrice

$$D = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(d)$$

est diagonalisable et, par définition de p et q,

$$D = (A-2I)^2 + 2(A-I)(3I-A) = -A^2 + 4A - 2I.$$

> *Pour une fois, on a une bonne raison de développer un polynôme en A : regardez ce qui arrive !*

Pour avoir $A = D + N$, on pose alors

$$N = A - D = A^2 - 3A + 2I = (A-I)(A-2I).$$

> *Eh oui ! On a développé pour mieux factoriser...*

Il est donc clair que $A = D + N$, que D est diagonalisable et que D et N commutent (ce sont des polynômes en A). De plus, comme $(X-1)(X-2)^2$ est le polynôme minimal de A **[1.]**, tout multiple de ce polynôme est un polynôme annulateur, donc

$$N^2 = (A-I)^2(A-2I)^2 = 0,$$

ce qui prouve que la matrice N est nilpotente.

> *On déduit facilement de **[1.]** que la matrice N est la même que celle qu'on avait obtenue au **[6.]**. Il en va donc de même pour la matrice $D = A - N$.*

Solution II ❀ Racines cubiques d'une matrice

1. Par hypothèse, $B^3 = A$, donc

$$AB = B^3.B = B^4 = B.B^3 = BA.$$

2. Comme $\lambda \neq 0$, il existe un réel θ tel que

$$\lambda = |\lambda|\, e^{i\theta}.$$

Il est alors clair que le nombre complexe

$$z_0 = |\lambda|^{1/3}\, e^{i\theta/3}$$

vérifie bien $z_0^3 = \lambda$. Comme $|z_0|^3 = |\lambda| > 0$, le complexe z_0 n'est pas nul et

$$\begin{aligned} z^3 = \lambda &\iff z^3 = z_0^3 \\ &\iff (z/z_0)^3 = 1 \\ &\iff z/z_0 \in \mathbb{U}_3 \end{aligned}$$

donc λ admet exactement trois racines cubiques complexes distinctes :

$$z_0, \quad jz_0, \quad j^2z_0.$$

Partie A. Existence d'une racine cubique

3. Quelle que soit la matrice A, son polynôme minimal est unitaire et ses racines sont (exactement) les valeurs propres de A.

Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Donc

$$\mu_A = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k).$$

4. Quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est unitaire, son degré est égal à n et ses racines sont (exactement) les valeurs propres de A.

Par conséquent, il existe des entiers naturels m_1, ..., m_d *non nuls* tels que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)^{m_k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{d} m_k = n.$$

> *Faute d'information supplémentaire, on ne peut rien dire de plus sur les multiplicités* m_k.

5. a. Quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(H_p) = P(\lambda I_p) = P(\lambda)I_p.$$

❧ D'après **[2.]**, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^3 = \lambda$, donc

$$(z_0 I_p)^3 = z_0^3 I_p = \lambda I_p = H_p.$$

La matrice $z_0 I_p$ est donc une racine cubique de H_p.

❧ Il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda) = z_0$ (par exemple, le polynôme constant $P = z_0$!), donc

$$z_0 I_p = P(H_p).$$

5. b. On a remarqué **[5.a.]** que la matrice $P(H_p)$ est une homothétie, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Autrement dit :

$$\mathbb{C}[H_p] = \mathbb{C} \cdot I_n.$$

> *On sait que, pour toute matrice A, la dimension du sous-espace $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A est égale au degré du polynôme minimal de A.*
> *Ici, $A = H_p$ est une homothétie, donc le degré de son polynôme minimal est égal à 1 — le polynôme minimal de H_p étant égal à $(X - \lambda)$.*

❧ En reprenant le nombre complexe z_0 de **[5.a.]**, la matrice

$$R = \mathrm{Diag}(jz_0, z_0, \dots, z_0)$$

est une racine cubique de H_p :

$$R^3 = \mathrm{Diag}\big((jz_0)^3, z_0^3, \dots, z_0^3\big) = \mathrm{Diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = H_p$$

et comme $p \geqslant 2$ et $z_0 \neq 0$ **[2.]**, la matrice R n'est pas une homothétie.

> *Si* $p = 1$, toutes *les matrices sont des homothéties !*

Il existe donc au moins une racine cubique de H_p qui n'appartient pas à la sous-algèbre $\mathbb{C}[H_p]$ des polynômes en H_p.

> *Comme λ admet exactement 3 racines cubiques complexes* **[2.]**, *la matrice $H_p \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$ admet exactement 3^p racines cubiques complexes diagonales et, parmi ces matrices, seules 3 sont des homothéties : $z_0 I_p$, $jz_0 I_p$ et $j^2 z_0 I_p$.*

5. c. Si $p = 1$, toutes les matrices sont diagonales, il n'y a donc pas de matrice qui ne soit diagonalisable !

❧ Si $p \geqslant 2$ et $\lambda = 0$, la matrice

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2 et *a fortiori* $E_{1,2}^3 = 0_p = H_p$.

Comme $E_{1,2}$ est nilpotente, elle n'a qu'une seule valeur propre (nulle) et comme elle n'est pas diagonale, elle n'est pas diagonalisable.

6. Comme la matrice A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_d$ tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \lambda_2 I_{m_2}, \dots, \lambda_d I_{m_d}).$$

D'après **[2.]**, il existe des nombres complexes z_1, z_2, ..., z_d tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad z_k^3 = \lambda_k$$

et donc **[5.a.]** la matrice

$$R = \mathrm{Diag}(z_1 I_{m_1}, z_2 I_{m_2}, \dots, z_d I_{m_d})$$

vérifie

$$\begin{aligned} R^3 &= \mathrm{Diag}(z_1^3 I_{m_1}, z_2^3 I_{m_2}, \dots, z_d^3 I_{m_d}) \\ &= \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \lambda_2 I_{m_2}, \dots, \lambda_d I_{m_d}) = Q^{-1}AQ. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(QRQ^{-1})^3 = QR^3Q^{-1} = A$$

donc la matrice $B = QRQ^{-1}$ est une racine cubique de A.

❧ Comme les complexes λ_1, ..., λ_d sont deux à deux distincts, la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange prouve qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad P(\lambda_k) = z_k.$$

Ce polynôme vérifie donc

$$P(Q^{-1}AQ) = R$$

(règles du calcul matriciel par blocs) et donc

$$\begin{aligned} B &= Q\big[P(Q^{-1}AQ)\big]Q^{-1} = QQ^{-1}P(A)QQ^{-1} \\ &= P(A) \in \mathbb{C}[A]. \end{aligned}$$

La racine cubique B appartient donc bien à la sous-algèbre $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A.

Partie B. Cas d'une matrice inversible

7. Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de cette matrice.

Ici, les valeurs propres de A sont les nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Comme A est inversible, les λ_k sont tous différents de 0.

8. Comme $\lambda_k \neq 0$, on déduit de **[2.]** qu'il existe trois complexes différents

$$\mu_k, \quad j\mu_k, \quad j^2\mu_k$$

tels que

$$(X^3 - \lambda_k) = (X - \mu_k)(X - j\mu_k)(X - j^2\mu_k).$$

Donc le polynôme

$$Q_0 = \prod_{k=1}^{d} (X - \mu_k)(X - j\mu_k)(X - j^2\mu_k)$$

est scindé.

❧ Si deux facteurs de Q_0 sont égaux, alors il existe deux exposants $0 \leqslant s, t \leqslant 2$ et deux indices $1 \leqslant k, \ell \leqslant d$ tels que

$$j^s\mu_k = j^t\mu_\ell.$$

En élevant au cube, on en déduit que $\lambda_k = \lambda_\ell$ et donc que $k = \ell$ (puisque les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts).

Comme $\lambda_k \neq 0$, alors $\mu_k \neq 0$ et il reste donc $j^s = j^t$. Mais $0 \leqslant s, t \leqslant 2$, donc $s = t$.

Par conséquent, les complexes $j^s\mu_k$ sont deux à deux distincts, ce qui prouve que toutes les racines de Q_0 sont simples.

9. D'après le cours (propriété de morphisme d'algèbres),

$$Q_0(B) = \prod_{k=1}^{d} (B^3 - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n)$$

et, d'après **[3.]**,

$$\prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n) = \mu_A(A) = 0_n.$$

Cela prouve que B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc B est diagonalisable.

Solution III ❀ Puissances d'une matrice

1. On transpose la relation donnée par l'énoncé :

$$A = (A^\top)^\top = 3(A^2)^\top - A^\top - I_n^\top = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n.$$

On en déduit que

$$(A^\top)^2 = \frac{1}{3}(A + A^\top + I_n).$$

❧ Toujours d'après la relation proposée par l'énoncé (et la propriété de morphisme d'algèbres vue en cours) :

$$\begin{aligned} P_0(A) &= (A^\top)^2 - A^2 \\ &= \frac{1}{3}(A + A^\top + I_n) - A^2 \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(3A^2 - A - I_n) + \frac{1}{3}I_n - A^2 = 0_n. \end{aligned}$$

Donc P_0 est bien un polynôme annulateur de A.

2. Comme P_0 est un polynôme annulateur de A **[1.]**, toutes les valeurs propres de A sont des racines de P_0.

Mais

$$P_0(0) = (3 \times 0^2 - 0 - 1)^2 - 0^2 = 1,$$

donc le scalaire 0 n'est pas une racine de P_0, donc 0 n'est pas une valeur propre de A et A est inversible.

3. On reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} P_0 &= (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1) \\ &= (3X + 1)(X - 1)(\sqrt{3}X + 1)(\sqrt{3}X - 1). \end{aligned}$$

Tout polynôme de degré 1 est irréductible, mission accomplie !

4. D'après **[1.]** et **[3.]**, la matrice A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

5. Par hypothèse, $AV = \lambda V$. Donc $A^2V = \lambda^2 V$ et comme $I_nV = V$, on en déduit que

$$A^\top.V = (3A^2 - A - I_n)V = (3\lambda^2 - \lambda - 1).V.$$

Le vecteur V n'est pas nul (c'est un vecteur propre de A par hypothèse), donc c'est bien un vecteur propre de $A^\top$, associé à la valeur propre $(3\lambda^2 - \lambda - 1)$.

> *La question n'est pas posée, il ne faut donc pas perdre de temps avec cela, mais lors d'une seconde lecture, il est intéressant de remarquer que les images respectives de* 1, $-1/3$, $1/\sqrt{3}$ *et* $-1/\sqrt{3}$ *par la fonction*
>
> $$\left[\lambda \mapsto 3\lambda^2 - \lambda - 1\right]$$
>
> *sont* 1, $-1/3$, $-1/\sqrt{3}$ *et* $1/\sqrt{3}$. *Cette application réalise donc une* permutation *des valeurs propres de* A.
> *Ce n'est pas étonnant : on sait qu'une matrice et sa transposée ont toujours les mêmes valeurs propres. Ce qui est plus étonnant, c'est que les vecteurs propres de* A *soient aussi des vecteurs propres de* $A^\top$ *— en général, c'est faux.*

6. a. Comme $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il existe quatre réels r_1, r_2, r_3 et r_4 tels que

$$R = \sum_{k=1}^{4} r_k L_k.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant \ell \leqslant 4, \quad R(\alpha_\ell) = \sum_{k=1}^{4} r_k L_k(\alpha_\ell) = \sum_{k=1}^{4} r_k \delta_{k,\ell} = r_\ell$$

(par définition des polynômes interpolateurs de Lagrange). Par conséquent,

$$\forall\, R \in \mathbb{R}_3[X], \quad R = \sum_{k=1}^{4} R(\alpha_k)L_k.$$

6. b. D'après le Théorème sur la division euclidienne, il existe un quotient $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un reste $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que

$$P = QP_0 + R.$$

L'évaluation étant un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 4, \quad P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)P_0(\alpha_k) + R(\alpha_k) = R(\alpha_k)$$

puisque les α_k sont les racines de P_0.

D'après **[6.a.]**,

$$R = \sum_{k=1}^{4} R(\alpha_k)L_k = \sum_{k=1}^{4} P(\alpha_k)L_k.$$

7. Appliquons le résultat de **[6.b.]** avec $P = X^\ell$: pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$X^\ell = Q_\ell P_0 + R_\ell \quad \text{avec} \quad R_\ell = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k^\ell L_k.$$

Comme P_0 est un polynôme annulateur de A **[1.]**,

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad A^\ell = Q_\ell(A)P_0(A) + R_\ell(A) = R_\ell(A)$$

et finalement

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad A^\ell = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k^\ell L_k(A).$$

8. On reprend le résultat de **[6.b.]** avec $P = L_k^2$: le reste de la division euclidienne de L_k^2 par P_0 est le polynôme

$$\sum_{\ell=1}^{4} L_k^2(\alpha_\ell)L_\ell = L_k$$

puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant 4, \quad L_k^2(\alpha_\ell) = \delta_{k,\ell}^2 = \delta_{k,\ell}.$$

❧ De même qu'au **[7.]**, comme P_0 est un polynôme annulateur de A, la division euclidienne

$$L_k^2 = QP_0 + L_k$$

nous donne

$$L_k^2(A) = Q(A)P_0(A) + L_k(A) = L_k(A).$$

❧ D'après la propriété de morphisme d'algèbres (de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$),

$$\big[L_k(A)\big]^2 = L_k^2(A) = L_k(A),$$

donc $L_k(A)$ est bien une matrice de projection.

La question n'est pas posée, il ne faut pas perdre de temps avec mais lors d'une seconde lecture, il faut faire le lien avec le cours !
On a factorisé P_0, polynôme annulateur de A, en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux **[3.]**.
D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{4} \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n)$$

et cela vaut, même si les scalaires α_k ne sont pas tous des valeurs propres de A (si $\alpha_k \notin \operatorname{Sp}(A)$, alors le sous-espace $\operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n)$ est réduit au vecteur nul, rien de plus).
On peut vérifier que les projections $L_k(A)$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, sont les projections associées à cette décomposition en somme directe, c'est-à-dire les ***projecteurs spectraux****.*
Il s'agit en fait de vérifier que, pour toute colonne X appartenant à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X = \sum_{k=1}^{4} L_k(A)X$$

et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 4, \quad L_k(A)X \in \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Cela ne pose aucune difficulté, puisque

$$\sum_{k=1}^{4} L_k = 1$$

d'après **[6.a.]** *et que, d'après l'expression des polynômes interpolateurs L_k, le produit $(X - \alpha_k)L_k$ est proportionnel au polynôme annulateur P_0 pour tout $1 \leqslant k \leqslant 4$.*

9. Comme $\alpha_1 = 1$, on déduit de **[7.]** que

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad A^\ell - L_1(A) = \sum_{k=2}^{4} \alpha_k^\ell L_k(A).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|A^\ell - L_1(A)\| &\leqslant \sum_{k=2}^{4} \|\alpha_k^\ell L_k(A)\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{4} |\alpha_k|^\ell \|L_k(A)\|. && \text{(homogénéité)} \end{aligned}$$

D'après **[3.]**, $|\alpha_k| < 1$ pour $2 \leqslant k \leqslant 4$, donc le second membre est une suite de limite nulle et on en déduit, par encadrement, que

$$\lim_{\ell \to +\infty} \|A^\ell - L_1(A)\| = 0.$$

Autrement dit, la suite $(A^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice de projection $L_1(A)$.

On n'a pas eu besoin de préciser quelle norme était choisie, puisqu'on n'a utilisé que des propriétés communes à toutes les normes.
Cela dit, on rappelle que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel DE DIMENSION FINIE *et que, de ce fait, toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes : il suffit de prouver la convergence et d'identifier la limite pour une norme particulière, le résultat est alors vrai pour* toutes *les normes.*

Solution IV ❀ Produit de convolution

Partie A. Propriétés générales

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme g est intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème de changement de variable que la composée $[t \mapsto g(x-t)]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (changement de variable *affine* $u = x - t$).

> *Il faut éviter d'inventer des propriétés qui n'en sont pas !*
> *Si u est continue et si v est continue par morceaux, alors la composée $u \circ v$ est continue par morceaux (en admettant que cette composée soit bien définie) mais, en général, la composée $v \circ u$ n'est pas continue par morceaux (même si elle est bien définie).*
> *Cependant, si u est* strictement monotone, *alors la composée $v \circ u$ est bien continue par morceaux (détail méconnu du Théorème de changement de variable).*

D'autre part, par hypothèse, la fonction f est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$. Par produit, la fonction

$$[t \mapsto f(t)g(x-t)]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale généralisée $(f \star g)(x)$ est convergente.

1. b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait **[1.a.]** que la fonction

$$[t \mapsto f(t)g(x-t)]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le changement de variable *affine* $u = x - t$ (qui donne $t = x - u$) montre que la fonction

$$[u \mapsto f(x-u)g(u)]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du = (g \star f)(x).\end{aligned}$$

1. c. On suppose ici qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(u) - f(v)\big| \leqslant k|u - v|.$$

Alors, quels que soient les réels x et y,

$$\begin{aligned}\forall\,t \in \mathbb{R}, \quad \big|f(x-t) - f(y-t)\big| &\leqslant k\big|(x-t) - (y-t)\big| \\ &\leqslant k|x-y|\end{aligned}$$

et on déduit de l'inégalité triangulaire intégrale que

$$\begin{aligned}&\big|(f \star g)(x) - (f \star g)(y)\big| \\ &\quad = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\big[f(x-t) - f(y-t)\big]\,dt\right| \qquad \textbf{[1.b.]} \\ &\quad \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(t)\big|\big|f(x-t) - f(y-t)\big|\,dt \\ &\quad \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(t)\big| \cdot k|x-y|\,dt = k\|g\|_1 \cdot |x-y|.\end{aligned}$$

L'application $(f \star g)$ est donc lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

1. d. Nous allons appliquer le Théorème de continuité sur les intégrales fonction d'un paramètre à **[1.b.]** :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

> *Comme g n'est pas continue, on ne peut pas appliquer ce théorème à l'intégrale*
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$$

❧ Pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, l'application

$$[x \mapsto f(x-t)g(t)]$$

est continue sur $\Omega = \mathbb{R}$ (car f est continue sur $\mathbb{R}$).

❧ Pour tout $x \in \Omega$, l'application

$$[t \mapsto f(x-t)g(t)]$$

est intégrable sur I **[1.b.]**.

❧ **Domination —** Il est clair que

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(x-t)g(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \big|g(t)\big| \tag{1}$$

et le majorant est indépendant de x, intégrable sur $I = \mathbb{R}$ en fonction de t (car $g \in F$).

Ainsi, l'application $(f \star g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a. On a admis que $(f \star g)$ était continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

❧ D'après **[1.b.]** et l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad \big|(f \star g)(x)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x-t)\big|\,\big|g(t)\big|\,dt.$$

On déduit alors de la propriété de domination (1)

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad \big|(f \star g)(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(t)\big|\,dt = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

Comme le majorant est indépendant de $x \in \mathbb{R}$, on a démontré que $(f \star g)$ était bornée sur $\mathbb{R}$ et donc que $f \in E$.

❧ Par passage à la borne supérieure dans l'encadrement précédent, on obtient

$$\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$$

quelles que soient $f \in E$ et $g \in F$.

2. b. On a démontré en **[2.a.]** que l'application $\mathscr{C}_g$ était définie de E dans E.

❧ Soient f_1 et f_2 dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On sait **[1.a.]** que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les deux applications

$$[t \mapsto f_1(t)g(x-t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto f_2(t)g(x-t)]$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$. On en déduit, par linéarité de l'intégrale, que

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad \big((\lambda f_1 + f_2) \star g\big)(x) = \lambda(f_1 \star g)(x) + (f_2 \star g)(x)$$

et donc que

$$(\lambda f_1 + f_2) \star g = \lambda(f_1 \star g) + (f_2 \star g).$$

L'application $\mathscr{C}_g$ est donc un endomorphisme de E.

Partie B. Régularisation

3. a. La fonction f_0 est constante sur les trois intervalles

$$]-\infty, -1/2[\,, \quad]-1/2, 1/2[\,, \quad]1/2, +\infty[\,,$$

donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

❧ La fonction f_0 ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc elle est bornée.

❧ La fonction f_0 est intégrable sur le segment $[-1/2, 1/2]$ (en tant que fonction constante sur cet intervalle) et nulle en dehors de ce segment, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

❧ Donc la fonction f_0 appartient bien à E et à F.

3. b. Quels que soient x et t,

$$\begin{aligned}|x-t| \leqslant 1/2 &\iff |t-x| \leqslant 1/2\\ &\iff -1/2 \leqslant t-x \leqslant 1/2\\ &\iff x-1/2 \leqslant t \leqslant x+1/2.\end{aligned}$$

D'après **[1.b.]**,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f_0 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(t)\,dt.$$

Comme la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental qu'elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f_0 \star g)(x) = G(x+1/2) - G(x-1/2).$$

Comme G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (primitive d'une fonction continue !), l'application $(f_0 \star g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f_0 \star g)'(x) = g(x+1/2) - g(x-1/2).$$

4. a. La fonction f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

❧ La fonction f_1 est bornée sur $[-A, A]$ (en tant que fonction continue sur un segment) et nulle en dehors de $[-A, A]$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

❧ La fonction f_1 est intégrable sur $[-A, A]$ (en tant que fonction continue sur un segment) et nulle en dehors de $[-A, A]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

❧ La fonction f_1 appartient donc bien aux deux sous-espaces E et F.

4. b. On reprend la technique du **[3.b.]** : comme

$$|x-t| \leqslant A \iff x-A \leqslant t \leqslant x+A,$$

on déduit de **[1.b.]** que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)g(t)\,dt\\ &= \int_{x-A}^{x+A} f_1(x-t)g(t)\,dt.\end{aligned}$$

> *On ne peut pas appliquer directement le Théorème fondamental (puisque l'intégrande $f_1(x-t)g(t)$ dépend de x), ni le Théorème de dérivation sous $\int$ (puisque l'intervalle d'intégration dépend de x).*

❧ On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère le voisinage

$$\mathcal{V} =]x_0 - A, x_0 + A[$$

de ce point x_0. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, il est clair que

$$[x-A, x+A] \subset I_{x_0} \overset{\text{déf.}}{=} [x_0 - 2A, x_0 + 2A],$$

donc (relation de Chasles)

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad (f_1 \star g)(x) = \int_{x_0-2A}^{x_0+2A} f_1(x-t)g(t)\,dt$$

puisque $f_1(x-t)$ est nulle en dehors de $[x-A, x+A]$.

> *Cette fois, l'intervalle d'intégration I_{x_0} est fixe, donc on peut tenter d'appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$.*

Pour $(x,t) \in \mathcal{V} \times I_{x_0}$, on pose

$$\varphi(x,t) = f_1(x-t)g(t).$$

❧ **Intégrabilité —** Quel que soit $x \in \mathcal{V}$, la fonction

$$[t \mapsto \varphi(x,t)]$$

est continue par morceaux sur le segment I_{x_0} (car f est de classe $\mathscr{C}^1$ et g est continue par morceaux), donc intégrable sur I_{x_0}.

❧ **Régularité —** Quel que soit $t \in I_{x_0}$, la fonction

$$[x \mapsto \varphi(x,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $\mathcal{V}$ (car f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V} \times I_{x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f_1'(x-t)g(t).$$

❧ **Intégrabilité (bis) —** Quel que soit $x \in \mathcal{V}$, la fonction

$$[t \mapsto f_1'(x-t)g(t)]$$

est continue par morceaux sur le segment I_{x_0} (car f' est continue sur $\mathbb{R}$ et g est continue par morceaux), donc intégrable sur I_{x_0}.

❧ **Domination —** Comme f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-A, A]$, sa dérivée f_1' est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-A, A]$. Par conséquent, la fonction f_1' est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V} \times I_{x_0}, \quad \big|f_1'(x-t)g(t)\big| \leqslant \|f_1'\|_\infty \cdot \big|g(t)\big|.$$

Le majorant est indépendant de x et, comme $g \in F$, il est intégrable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle I_{x_0}.

❧ D'après le Théorème de dérivation sous $\int$, la fonction $(f_1 \star g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $\mathcal{V}$, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(x-t)g(t)\,dt\\ &= \big((f_1') \star g\big)(x).\end{aligned}$$

Partie C. Approximation

5. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction φ_n est en particulier de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme

$$|nt| \leqslant 1 \iff |t| \leqslant 1/n,$$

la fonction φ_n est nulle en dehors du segment

$$[-A, A] = [-1/n, 1/n].$$

On peut donc déduire de **[4.a.]** que $\varphi_n \in E \cap F$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

> *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|\varphi_n(t)\big| = n\,\big|f(nt)\big| \leqslant n\,\|f\|_\infty.$$
>
> *Le majorant est indépendant de* t*, donc chaque fonction* φ_n *est bornée sur* $\mathbb{R}$.
> *Cependant, le majorant dépend de* n*, les fonctions* φ_n *ne sont pas uniformément bornées sur* $\mathbb{R}$.

❧ Comme l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est NON NUL, on peut considérer le changement de variable *affine* $u = nt$. Comme la fonction f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème de changement de variable que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1.$$

6. a. La fonction g est ici supposée continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc elle appartient à l'espace vectoriel F. On déduit de **[4.b.]** que $\varphi_n \star g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. b. Comme $\varphi_n \in E$ **[5.]** et que $g \in F$ **[6.a.]**, le produit de convolution

$$(\varphi_n \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\varphi_n(t)\,dt$$

est bien défini. On déduit de **[5.]** que

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi_n(t)\,dt$$

et donc, par linéarité de l'intégrale,

$$(\varphi_n \star g)(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[g(x-t) - g(x)\big]\varphi_n(t)\,dt.$$

On a déjà remarqué que $|nt| \leqslant 1$ équivaut à $|t| \leqslant 1/n$, donc

$$(\varphi_n \star g)(x) - g(x) = \int_{-1/n}^{1/n} \big[g(x-t) - g(x)\big] \cdot f(nt) \cdot n\,dt$$

et le changement de variable affine $u = nt$ nous donne $t = u/n$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad (\varphi_n \star g)(x) - g(x) = \int_{-1}^{1} \big[g(x - u/n) - g(x)\big] f(u)\,du.$$

Par inégalité triangulaire intégrale,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \big|(\varphi_n \star g)(x) - g(x)\big| \leqslant \int_{-1}^{1} \big|g(x - u/n) - g(x)\big| f(u)\,du \quad (2)$$

puisque f est supposée positive.

❧ Soit $a > 0$ et imposons $x \in \mathcal{V} = [-a, a]$. Alors

$$\forall\, x \in \mathcal{V},\ \forall\, u \in [-1,1],\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad x - u/n \in [-a-1, a+1]. \quad (3)$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, donc uniformément continue sur le segment $[-a-1, a+1]$.

❧ Fixons $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, y, z \in [-a-1, a+1],\quad |y - z| \leqslant \alpha \implies \big|g(y) - g(z)\big| \leqslant \varepsilon. \quad (4)$$

Posons maintenant

$$N_0 = \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1.$$

On a donc

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_0} \leqslant \alpha$$

et donc, d'après (3) et (4),

$$\forall\, n \geqslant N_0,\ \forall\, x \in \mathcal{V},\ \forall\, u \in [-1,1],\quad \big|g(x - u/n) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

On déduit alors de (2) que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \forall\, x \in \mathcal{V},\quad \big|(\varphi_n \star g)(x) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon \int_{-1}^{1} f(u)\,du = \varepsilon$$

et donc (puisque le majorant ne dépend pas de x) que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \sup_{x \in \mathcal{V}} \big|(\varphi_n \star g)(x) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

> *Le point essentiel de la démonstration est de choisir l'entier* N_0 *indépendamment du réel* x*. En relisant la démonstration, on constate que le choix de* N_0 *repose uniquement sur les choix du réel* $\varepsilon > 0$ *et du segment* $[-a-1, a+1]$.

Autrement dit, on a démontré que, pour tout $a > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [-a,a]} \big|(\varphi_n \star g)(x) - g(x)\big| = 0$$

et donc que la suite de fonctions $(\varphi_n \star g)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeait uniformément sur tout segment $[-a, a]$ vers la fonction g.

> *Il est intéressant de faire le parallèle avec le Théorème d'approximation de Weierstrass.*
> *On suppose ici que la fonction* g *est continue et intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(et pas seulement continue sur un segment).*
> *On définit une suite* $(\varphi_n \star g)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *de fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *d'après* ***[6.a.]****, mais en reprenant la démonstration de* ***[4.b.]****, on pourrait vérifier sans trop de difficulté que les fonctions* $\varphi_n \star g$ *sont en fait de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *— sans être polynomiales, il ne faut pas trop en demander.*
> *On obtient de cette manière une suite de fonctions régulières qui approche la fonction* g *uniformément sur tout segment.*
> *Pour plus de détails, voir l'article* Suite régularisante *sur Wikipédia.*