*Soient $E$, un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une famille d'endomorphismes non identiquement nuls tels que*

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} \cdot p_i.$$

*Démontrer que le rang de chaque endomorphisme $p_i$ est égal à $1$ et que*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i.$$

Comme $p_i$ n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, son rang est au moins égal à 1, donc la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

❧ Pour démontrer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \qquad \text{et que} \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i \in \operatorname{Im} p_i.$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 0_E = p_j(0_E) = p_j\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_j(x_i)$$

Par hypothèse, les endomorphismes $p_i$ sont des projecteurs :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad p_i \circ p_i = \delta_{i,i} \cdot p_i = p_i.$$

Par conséquent, comme $x_i \in \operatorname{Im} p_i$ par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i = p_i(x_i)$$

et donc

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} p_j\big(p_i(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{j,i} \cdot p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j.$$

Comme tous les vecteurs $x_j$ sont nuls, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_j$ sont bien en somme directe.

❧ En particulier,

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \dim \operatorname{Im} p_i \geqslant n$$

puisque la dimension de chaque sous-espace $\operatorname{Im} p_i$ est au moins égale à 1.

Par ailleurs, la dimension d'un sous-espace de $E$ est toujours inférieure à celle de $E$, donc

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) \leqslant \dim E = n.$$

Ainsi,

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i\Big) = n = \dim E.$$

✍ *Si $F$ est un sous-espace de $E$, espace vectoriel de dimension finie, et que $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.*

On en déduit d'une part l'égalité des deux espaces vectoriels (inclusion et égalité des dimensions) :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$$

et d'autre part que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \dim \operatorname{Im} p_i = 1.$$

✍ *Si la somme de $n$ entiers supérieurs à $1$ est égale à $n$, alors chaque terme est égal à $1$ :*

$$0 = n - \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(1 - d_i)}_{\leqslant 0}.$$