Hyperplans et formes linéaires [rms135-506]

1. *Soit φ, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer qu'il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

2. *En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.*

1.

✍ *Rappelons pour commencer que si*

$$B = (b_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \qquad \textit{et} \qquad M = (m_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n},$$

alors

$$\mathrm{tr}(B^\top.M) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{k,\ell}.m_{k,\ell}.$$

❧ Notons $(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(E^*_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$, sa base duale. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$M = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} E^*_{k,\ell}(M)E_{k,\ell}$$

et pour toute forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \varphi(E_{k,\ell})E^*_{k,\ell}(M).$$

En posant

$$A = \big(\varphi(E_{k,\ell})\big)^\top_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$

on en déduit que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \mathrm{tr}(A.M).$$

✍ *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut invoquer le Théorème de Riesz (représentation d'une forme linéaire sur un espace euclidien au moyen du produit scalaire).*

2. Soit H, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire non identiquement nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et, d'après la question précédente, il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad M \in H \iff \mathrm{tr}(AM) = 0.$$

✍ *Remarquons que, pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, il existe une matrice J_r de rang r et de trace nulle :*

$$\forall\, 1 \leqslant r < n, \qquad J_r = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et pour } r = n, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ On raisonne par l'absurde en supposant que l'hyperplan H ne contient aucune matrice inversible :

$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{tr}(AM) \neq 0.$$

Comme la matrice A n'est pas la matrice nulle, son rang r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n$ et la matrice A est équivalente à une matrice J_r de rang r et de trace nulle. Il existe donc deux matrices inversibles Q et P telles que

$$Q^{-1}AP = J_r.$$

On en déduit que

$$0 = \mathrm{tr}(J_r) = \mathrm{tr}(Q^{-1}AP) = \mathrm{tr}\big((AP)Q^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(A.(PQ^{-1})\big) \neq 0$$

et la contradiction est manifeste.