Soient $(a_1, \dots, a_n)$ *et* $(b_1, \dots, b_n)$*, deux listes de réels. On considère l'application*

$$f : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}.$$

Démontrer que f *atteint un maximum et un minimum. Expliciter ces deux extrema.*

Comme le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est un ensemble *fini*, la fonction f prend un nombre *fini* de valeurs réelles : elle atteint donc un maximum et un minimum.

✍ *En passant un concours, un candidat a eu des notes variées* $a_1, \dots, a_n$*. Imaginons que les coefficients imposés soient* $b_1, \dots, b_n$ *mais que le candidat puisse choisir d'affecter arbitrairement ces coefficients aux notes qu'il a reçues... C'est en pondérant les meilleures notes avec les plus forts coefficients et les pires notes avec les plus faibles coefficients qu'il aura la meilleure moyenne générale.*

L'exercice est terminé !

❧ Pour simplifier la démonstration, nous allons supposer que les réels a_k sont déjà rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall\, 1 \leqslant k < d, \qquad a_k \leqslant a_{k+1}.$$

❧ Considérons quatre réels $x_1 \leqslant x_2$ et $y_1 \leqslant y_2$. Le produit

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_2y_2 + x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1$$

est clairement positif, donc

$$x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1.$$

❧ Considérons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et, pour deux entiers $k \neq \ell$, la transposition $\tau = \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\tau \circ \sigma) - f(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(\sigma(i))} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} b_{\tau(j)} - a_{\sigma^{-1}(j)} b_j \\
&= a_{\sigma^{-1}(k)}(b_{\tau(k)} - b_k) + a_{\sigma^{-1}(\ell)}(b_{\tau(\ell)} - b_\ell)) \\
&= (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)})(b_\ell - b_k).
\end{aligned}$$

La valeur $f(\sigma)$ est donc maximale si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad (a_{\sigma^{-1}(k)} - a_{\sigma^{-1}(\ell)})(b_\ell - b_k) \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad (a_k - a_\ell)(b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)}) \geqslant 0.$$

Par hypothèse, les a_k sont rangés dans l'ordre croissant :

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \qquad a_k \leqslant a_\ell,$$

donc la valeur $f(\sigma)$ est maximale si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \qquad b_{\sigma(k)} - b_{\sigma(\ell)} \geqslant 0$$

c'est-à-dire si les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre croissant :

$$b_{\sigma(1)} \leqslant b_{\sigma(2)} \leqslant \cdots \leqslant b_{\sigma(k)} \leqslant b_{\sigma(k+1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{\sigma(n)}.$$

❧ Par symétrie, la valeur $f(\sigma)$ est minimale si, et seulement si, les réels $b_{\sigma(k)}$ sont rangés dans l'ordre décroissant :

$$b_{\sigma(1)} \geqslant b_{\sigma(2)} \geqslant \cdots \geqslant b_{\sigma(k)} \geqslant b_{\sigma(k+1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{\sigma(n)}.$$