1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \quad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

2. *Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos a\pi \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $2\cos a\pi$ est en fait un entier relatif.*

1. L'ensemble V des valeurs prises par l'expression $x + {}^1\!/_x$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$ est un ensemble infini. Par conséquent, si deux polynômes P et Q vérifient $P(y) = Q(y)$ pour tout $y \in V$, alors $P = Q$.

✍ *Une étude rapide montre que $V =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.*

Il existe donc **au plus un** polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

❧ Il est clair que les polynômes $P_0 = 2$ et $P_1 = X$ conviennent.
Il n'est pas plus difficile de remarquer que $P_2 = X^2 - 2$ convient :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \qquad \Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 = \Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) + 2.$$

HR : Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, il existe deux polynômes P_n et P_{n-1} à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^*, \qquad P_n\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n} \quad \text{et} \quad P_{n-1}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = \Big(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\Big) + \Big(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\Big)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, on en déduit que le polynôme P_{n+1} défini par

$$P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$$

convient.

L'existence des polynômes P_n est ainsi démontrée par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *L'unicité des polynômes P_n prouve que ces polynômes vérifient* nécessairement *la relation de récurrence*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

(Sans l'unicité, cette relation n'est qu'une condition suffisante pour trouver des polynômes convenables.)

On déduit alors de cette relation (au moyen d'une nouvelle démonstration par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est un polynôme unitaire de degré n.

2. Comme $a \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = {}^n\!/_q$ et (formules de Moivre-Euler)

$$2\cos a\pi = e^{ia\pi} + e^{-ia\pi} = e^{ia\pi} + \frac{1}{e^{ia\pi}}.$$

Par construction du polynôme P_{2q},

$$P_{2q}(2\cos a\pi) = (e^{ia\pi})^{2q} + \frac{1}{(e^{ia\pi})^{2q}} = e^{2in\pi} + e^{-2in\pi} = 2.$$

Ainsi, le réel $2\cos a\pi$ est un nombre rationnel qui est une racine du polynôme $P_{2q} - 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

Il existe donc deux entiers $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$, *premiers entre eux*, et des entiers $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1}$ tels que

$$2\cos a\pi = \frac{u}{v} \quad \text{et} \quad \Big(\frac{u}{v}\Big)^d + \sum_{k=0}^{d-1} \beta_k \Big(\frac{u}{v}\Big)^k = 0.$$

✍ *Le polynôme P_{2q} est unitaire, détail capital !*

En multipliant par v^d, on en déduit que

$$u^d = -\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k} = -v\Big(\sum_{k=0}^{d-1} \beta_k u^k v^{d-k-1}\Big).$$

Cette factorisation est licite dans $\mathbb{Z}$: pour $0 \leqslant k < d$, la différence $(d-k)$ est un entier naturel non nul, donc $(d-k-1) \in \mathbb{N}$. Comme les β_k et u sont des entiers relatifs, on en déduit que le second membre est un entier multiple de v et donc que v est un diviseur de u^d.

Par construction, on a choisi u et v premiers entre eux, donc v est premier à u^d.

On a ainsi démontré que $v = 1$ et donc que $2\cos\alpha\pi = u/1 = u \in \mathbb{Z}$.

✍ *En tant que réel, il est clair que* $2\cos\alpha\pi \in [-2, 2]$, *donc*

$$\cos\alpha\pi \in \{-1, \quad -1/2, \quad 0, 1/2, \quad 1\}.$$

Par conséquent, les rationnels α *tels que* $\cos\alpha\pi$ *soient rationnels sont* 0, $1/3$, $1/2$, $2/3$ *et* 1 *(et tous ceux qui s'en déduisent grâce aux symétries de la fonction* $\cos$*).*