> *Soit* G*, un ensemble muni d'une loi de composition interne associative* $*$*. On suppose qu'il existe un élément* $e \in G$ *tel que*
> $$\forall\, x \in G, \quad x * e = x$$
> *et que*
> $$\forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \quad x * x' = e.$$
> *Démontrer que* $(G, *)$ *est un groupe.*

✍ *Il faut bien connaître les axiomes des groupes pour savoir ce qu'il convient de démontrer ! Il suffit de vérifier que l'élément* e *donné par l'énoncé vérifie en fait les propriétés suivantes.*

$$\forall\, x \in G, \quad x * e = e * x = x \qquad \textit{et} \qquad \forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \quad x' * x = x * x' = e.$$

Considérons l'élément e donné par l'énoncé et choisissons un élément $x \in G$. D'après l'énoncé, il existe un élément $x' \in G$ tel que $x * x' = e$ et $x * e = x$. Toujours d'après l'énoncé, $x' * e = x'$.

❧ Considérons alors l'élément $x' * x \in G$. Par hypothèse, il existe un élément de G, que nous noterons $(x' * x)'$, tel que $(x' * x) * (x' * x)' = e$.

❧ Par associativité de $*$, on déduit des relations précédentes que

$$x' = x' * e = x' * (x * x') = (x' * x) * x'$$

et donc (en multipliant à droite par x) que

$$x' * x = [(x' * x) * x'] * x = (x' * x) * (x' * x).$$

En multipliant à droite par l'élément $(x' * x)'$ introduit ci-dessus, on en déduit que

$$\begin{aligned} e &= (x' * x) * (x' * x)' \\ &= [(x' * x) * (x' * x)] * (x' * x)' = (x' * x) * [(x' * x) * (x' * x)'] = (x' * x) * e \\ &= (x' * x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\forall\, x \in G,\ \exists\, x' \in G, \qquad x' * x = x * x' = e.$$

❧ Par conséquent, pour tout $x \in G$, il existe un élément $x' \in G$ tel que

$$e * x = (x * x') * x = x * (x' * x) = x * e = x$$

et nous avons enfin démontré que $(G, *)$ était bien un groupe.