Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier $n \geqslant ab$, il existe deux entiers naturels u et v tels que

$$au + bv = n.$$

✍ *Pour apprécier l'exercice, il faut le comparer à la caractérisation de Bézout des entiers premiers entre eux : deux entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, pour tout entier* relatif n, *il existe deux entiers* relatifs u *et* v *tels que*

$$au + bv = n.$$

❧ Choisissons un entier $n \geqslant ab$. Par hypothèse, il existe des entiers naturels u_0, v_0, u_1 et v_1 tels que

$$au_0 + bv_0 = n \qquad \text{et} \qquad au_1 + bv_1 = (n+1).$$

Par différence, il existe deux entiers relatifs $u = u_1 - u_0$ et $v = v_1 - v_0$ tels que

$$au + bv = 1$$

et par conséquent u et v sont premiers entre eux.

❧ Réciproquement, supposons que a et b soient premiers entre eux et considérons un entier $n \geqslant ab$.

D'après la caractérisation de Bézout, il existe deux entiers *relatifs* u_0 et v_0 tels que

$$au_0 + bv_0 = n. \tag{$\star$}$$

Comme a, b et n sont des entiers *naturels* non nuls, on ne peut pas avoir $u_0 \leqslant 0$ et $v_0 \leqslant 0$.

Supposons donc que $u_0 > 0$ et $v_0 < 0$. D'après ($\star$), pour tout entier naturel k,

$$a(u_0 - kb) + b(v_0 + ka) = n.$$

Choisissons en particulier l'entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_0 + ka < a$.

✍ *Comme $a \geqslant 1$, cette contrainte sur k peut aussi s'écrire sous la forme*

$$\frac{-v_0}{a} \leqslant k < \frac{-v_0}{a} + 1,$$

*ce qui nous donne $k = \lceil {}^{-v_0}/_{a} \rceil$ (**partie entière supérieure**) et cet entier est bien un entier* naturel *puisque $v_0 < 0$.*

On a donc

$$a(u_0 - kb) = au_0 - kab \overset{(\star)}{=} (n - bv) - kab = n - (v_0 + ka)b.$$

Par choix de k, le facteur $(v_0 + ka)$ est strictement inférieur à a, donc le produit $(v_0 + ka)b$ est strictement inférieur à ab et par conséquent $a(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. Comme a est un entier naturel non nul, on en déduit que $(u_0 - kb) \in \mathbb{N}$. En posant

$$u = u_0 - kb \qquad \text{et} \qquad v = v_0 + ka,$$

on a donc deux entiers <u>naturels</u> u et v tels que $au + bv = n$.

✍ *Une démonstration analogue est possible dans l'autre cas à étudier : $u_0 < 0$ et $v_0 > 0$.*