Composition de Mathématiques

Le 22 janvier 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie A. Définition

Dans cette partie, on considère les intervalles

$$I =]0, +\infty[\quad \textit{et} \quad \Omega =]-\infty, 1]$$

et la fonction

$$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, (t, x) \in I \times \Omega, \quad f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $I \times \Omega$.
2. Démontrer que la fonction $[t \mapsto f(t, 1)]$ est intégrable sur l'intervalle I.
3. En déduire que la fonction $[t \mapsto f(t, x)]$ est intégrable sur l'intervalle I pour tout réel $x \in \Omega$.

On peut donc définir une fonction

$$L :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$\forall\, x \in]-\infty, 1]\,, \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x)\, dt.$$

Cette fonction L est appelée ***fonction dilogarithme****.*

4. Démontrer que la fonction L est continue sur Ω.

Partie B. Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction dilogarithme est développable en série entière.
Pour cela, on considère un réel $x \in [-1, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$s_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

en posant

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = te^{-(n+1)t} x^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la fonction s_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\, dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

6. Démontrer que la série de fonctions $\sum s_n$ converge simplement sur l'intervalle I et expliciter la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)$$

pour tout $t \in I$.
7. Démontrer que la série

$$\sum \frac{x^n}{n^2}$$

converge et déduire des questions précédentes que

$$L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

8. Démontrer que

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

9. En déduire les valeurs de $L(1)$ et de $L(-1)$.

Partie C. Une autre propriété de L

Dans cette partie, on considère la fonction

$$h :]0, 1[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, x \in]0, 1[, \quad h(x) = L(x) + L(1 - x) + \ln x \ln(1 - x).$$

10. Démontrer que la fonction L est dérivable sur $]-1, 1[$, que $L'(0) = 1$ et que

$$\forall\, 0 < |x| < 1, \quad L'(x) = \frac{-\ln(1 - x)}{x}.$$

11. Démontrer que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.
12. Démontrer que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad h(x) = L(1).$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{2e^t - 1}.$$

❖ II – Problème ❖

On s'intéresse ici à la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances d'une matrice carrée à coefficients complexes :

$$M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Partie A. Un cas particulier

Dans cette première partie, on considère un entier $n \geqslant 3$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque.
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on note $M(a, b)$, la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à b et les autres coefficients sont tous égaux à a.

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

On notera $P_{a,b}$, le polynôme caractéristique de cette matrice.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, un vecteur propre de la matrice $M(1, 1)$.

1. a. Démontrer que V est un vecteur propre de la matrice $M(a, b)$.

1. b. Dans quel cas la réciproque est-elle vraie ?

2. Soit $V \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, un vecteur propre de $M(1, 1)$ associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ *non nulle*. Démontrer que $V \in \operatorname{Im} M(1, 1)$. En déduire une valeur propre de $M(a, b)$.

3. En étudiant le noyau de $M(1, 1)$, déterminer une valeur propre de $M(a, b)$ dont la multiplicité est au moins égale à $(n - 1)$.

4. Démontrer que la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable.
☞ *On distinguera le cas particulier $a = 0$.*

5. En déduire le polynôme caractéristique de $M(a, b)$. Démontrer que le polynôme

$$Q_{a,b} = \big(X - (b - a)\big)\big(X - b - (n - 1)a\big) \in \mathbb{C}[X].$$

est un polynôme annulateur de $M(a, b)$.

6. On suppose que $a \neq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. En déduire une expression de $M(a, b)^k$ comme combinaison linéaire des matrices I_n et $M(a, b)$.

7. On suppose que

$$|b - a| < 1 \quad \text{et que} \quad \big|b + (n - 1)a\big| < 1.$$

Déterminer la limite de $M(a, b)^k$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Partie B. Limite des puissances d'une matrice

Dans la suite du sujet, l'espace vectoriel $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes, identifié à l'espace $\mathbb{C}^n$, est muni de la norme produit :

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|.$$

L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées est muni de la norme subordonnée :

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|M\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|Mx\|.$$

On remarquera que, bien que ces deux normes soient notées de la même manière, aucune confusion n'est possible.
On rappelle que, par définition,

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall\, x \in E, \quad \|Mx\| \leqslant \|M\|\,\|x\|$$

et que la norme subordonnée est sous-multiplicative :

$$\forall\, M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|M_1M_2\| \leqslant \|M_1\|\,\|M_2\|.$$

La base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est notée

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n).$$

8. On considère une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ en supposant que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \lim_{k\to+\infty} \|M_k(e_j) - L(e_j)\| = 0.$$

Démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|M_k - L\| = 0.$$

Dans un premier temps, on considère une matrice triangulaire supérieure T :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

en supposant que

$$\forall\, 1 \leqslant m \leqslant n, \quad |\lambda_m| < 1.$$

9. Démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \big\|T^k(e_1)\big\| = 0.$$

On suppose qu'il existe un entier $1 \leqslant i < n$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant i, \qquad \lim_{k\to+\infty} \big\|T^k(e_j)\big\| = 0.$$

10. a. Démontrer qu'il existe un vecteur

$$x \in \operatorname{Vect}(e_j,\ 1 \leqslant j \leqslant i)$$

tel que

$$T(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

10. b. En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad T^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x).$$

11. a. Démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x) \right\| = 0.$$

11. b. En déduire que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| T^k(e_{i+1}) \right\| = 0.$$

12. En déduire que

$$\lim_{k\to+\infty} T^k = 0_n.$$

On considère maintenant une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont strictement inférieures à 1 en module :

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad |\lambda| < 1.$$

13. Démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n.$$

Partie C. Méthode de Gauss-Seidel

Dans cette partie, on suppose que la matrice

$$A = (a_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

*est une matrice **à diagonale fortement dominante**, c'est-à-dire*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |a_{k,k}| > \sum_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n \\ \ell\neq k}} |a_{k,\ell}|.$$

On admet *qu'une telle matrice est **inversible**.*

❦ *On considère deux matrices $M = (m_{k,\ell})$ et $F = (f_{k,\ell})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définies de la manière suivante :*

— *si $k \geqslant \ell$, alors $m_{k,\ell} = a_{k,\ell}$ et $f_{k,\ell} = 0$;*

— *si $k > \ell$, alors $m_{k,\ell} = 0$ et $f_{k,\ell} = a_{k,\ell}$.*

Autrement dit, on a décomposé la matrice A sous la forme

$$A = M - F$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, une matrice colonne. Comme la matrice A est inversible, il existe une, et une seule, matrice colonne $x \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que

$$Ax = y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

14. Démontrer que la matrice M est inversible.

Dans le suite de cette partie, on pose

$$B = M^{-1}F$$

et on définit par récurrence une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes par la donnée d'un vecteur $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et de la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}y.$$

15. Démontrer que

$$x = Bx + M^{-1}y.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de la matrice B. On note alors

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}),$$

un vecteur propre de B associé à cette valeur propre λ.

❦ *On rappelle la **convention usuelle** : si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, alors*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=n+1}^{n} u_k = 0.$$

16. Démontrer que $Fv = \lambda Mv$. En déduire que

$$\lambda a_{k,k} v_k = -\left(\sum_{\ell=k+1}^{n} a_{k,\ell} v_\ell + \lambda \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{k,\ell} v_\ell \right)$$

pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$.

17. Démontrer qu'il existe un entier $1 \leqslant k_0 \leqslant n$ tel que

$$|v_{k_0}| = \max_{1\leqslant \ell\leqslant n} |v_\ell|$$

et que $v_{k_0} \neq 0$. En déduire que

$$|\lambda a_{k_0,k_0}| \leqslant \sum_{\ell=k_0+1}^{n} |a_{k_0,\ell}| + |\lambda| \sum_{\ell=1}^{k_0-1} |a_{k_0,\ell}|.$$

18. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que

$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0.$$

19. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad X_k - x = B^k(X_0 - x)$$

et conclure.

Extraits des rapports du jury

Remarques générales

Les problèmes de permutation de symboles $\sum$ et $\int$; $\sum$ et lim et $\int$ et lim se rencontrent dans presque tous les énoncés de sujets de mathématiques.

Les candidats maîtrisant bien les outils principaux pour aborder ces problèmes (convergence normale, convergence uniforme, convergence dominée...) sont généreusement recompensés par le barème.

Les candidats essayant de tricher à ce sujet :
— en écrivant tout simplement *"par un théorème du cours"*,
— en énoncant un théorème sans vérifier ses conditions d'application dans le cadre du sujet,
— ou encore faisant des majorations inutiles ou imprécises
sont toujours fortement pénalisés.

Il est vivement conseillé aux candidats de bien assimiler ce morceau de programme, car il est extrêmement important pour réussir l'epreuve de mathématiques.

Il est toujours plus valorisant de "bien faire" un peu moins de questions que d'essayer de grappiller des points partout.

"Bien faire" n'est pas synonyme d'écrire beaucoup : la longueur de la rédaction ne rajoute pas de points. Le correcteur cherche des arguments clés, formulés de manière précise et concise. Pour cela, souvent quelques lignes suffisent. Les meilleurs copies sont brèves.

Si vous ne connaissez pas la réponse, il vaut mieux ne rien écrire et admettre le résultat pour la suite que de perdre du temps à divaguer. Les élucubrations du type : *"procédons par analyse-synthèse" : analyse (suivi d'un baratin), synthèse (encore un baratin), bilan (et donc, on a ce qu'il fallait démontrer)* indisposent le correcteur.

Problème d'analyse

1. Il n'est pas suffisant d'affirmer que le dénominateur ne s'annule pas : il faut le démontrer.

2. Les candidats oublient souvent de mentionner la continuité de la fonction.

3. Peu de candidats pensent à mentionner la positivité de f dans leur raisonnement, alors qu'ils l'utilisent implicitement pour démontrer l'inégalité.

4. Une part des candidats ne domine pas convenablement la fonction intégrée pour appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

5. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

6. La plupart des candidats reconnaissent la série géométrique, mais peu justifient que sa raison q vérifie $|q| < 1$.

7. De nombreux candidats établissent que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$, mais ils oublient d'étudier la convergence en $x = -1$ et en $x = 1$. Des hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont souvent omises et d'autres mal formulées.

11. Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à justifier correctement que h est dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$. Le calcul de h' est souvent erroné : beaucoup de candidats se sont trompés pour dériver la composée $[x \mapsto L(1 - x)]$.

12. L'étude de la limite de la fonction h en 0 ou en 1 est rarement suffisamment justifiée.

Problème d'algèbre

4. Le théorème de Cayley-Hamilton est hors sujet ici. Le cas particulier $a = 0$ est souvent oublié.

6. Les candidats qui abordent cette question sont ceux qui connaissent la méthode et les calculs à mener.

9. Beaucoup d'erreurs de rédaction, les candidats ne distinguent pas les égalités vectorielles des égalités en normes.

10. b. Question plus technique. Lorsqu'elle est abordée, elle l'est par une récurrence plus ou moins bien menée.

11. Les bonnes réponses à cette question difficile sont exceptionnelles. Certains candidats se sont aventurés dans une démonstration sans avoir repéré la principale difficulté de cette question.

12. Quelques candidats ont su reconnaître la récurrence entamée dans les questions précédentes.

14. Les candidats justifient l'inversibilité de M la plupart du temps par un calcul de déterminant, parfois par le résultat admis sur les matrices à diagonale strictement dominante. Mais on observe également beaucoup d'arguments faux : les matrices triangulaires seraient toutes inversibles ; les coefficients diagonaux de A seraient non nuls parce que A est inversible.

Solution I ❀ La fonction dilogarithme

Partie A. Définition

1. Pour $x \in \Omega$, on a $x \leqslant 1$ et pour $t \in I$, on a $t > 0$, donc $e^t > 1$. Ainsi $e^t - x > 0$ et il est impossible de diviser par zéro. La fonction f est donc bien définie sur $I \times \Omega$.

2. Il est clair que la fonction $[t \mapsto f(t,1)]$ est continue sur l'intervalle (ouvert) I.

❧ Lorsque t tend vers 0,

$$\frac{t}{e^t - 1} \sim \frac{t}{t} = 1$$

donc la fonction intégrande tend vers une limite finie (égale à 1) au voisinage d'une borne finie (ici, 0), donc cette fonction est intégrable au voisinage de 0.

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\frac{t}{e^t - 1} \sim te^{-t} = (te^{-t/2})e^{-t/2} \overset{\star}{=} o(e^{-t/2})$$

par croissances comparées ($\star$). Or la fonction $[t \mapsto e^{-at}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout $a > 0$ et en particulier pour $a = 1/2$, donc la fonction $[t \mapsto f(t,1)]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction $[t \mapsto f(t,1)]$ est donc intégrable sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

3. Soit $x \in \Omega$. Pour tout $t > 0$,

$$e^t - x \geqslant e^t - 1 > 0$$

donc

$$\forall\,(t,x) \in I \times \Omega, \quad 0 < f(t,x) \leqslant f(t,1).$$

> *On vient d'établir ici une propriété de domination.*

Comme la fonction $[t \mapsto f(t,x)]$ est évidemment continue sur l'intervalle I et que, d'après la question précédente, la fonction $[t \mapsto f(t,1)]$ est intégrable sur I, on a démontré que la fonction $[t \mapsto f(t,x)]$ était intégrable sur I.

4. Nous allons appliquer le Théorème de continuité.

❧ **Intégrabilité** — On a démontré **[3.]** que $[t \mapsto f(t,x)]$ était intégrable sur I, quel que soit $x \in \Omega$.

❧ **Régularité** — Comme on ne divise pas par zéro **[1.]**, il est clair que $[x \mapsto f(t,x)]$ est continue sur Ω, quel que soit $t \in I$.

❧ **Domination** — On vient de démontrer **[3.]** que

$$\forall\,(t,x) \in I \times \Omega, \quad 0 \leqslant f(t,x) \leqslant f(t,1).$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et intégrable sur I d'après **[2.]**.

D'après le Théorème de continuité, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt\right]$$

est continue sur Ω et, par produit avec la fonction continue $[x \mapsto x]$, la fonction L est continue sur Ω.

Partie B. Développement en série entière

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que la fonction

$$\left[t \mapsto te^{-(n+1)t}\right]$$

est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et

$$te^{-(n+1)t} = e^{-nt} \cdot te^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(te^{-t}).$$

> *Pour $n = 0$, le facteur e^{-nt} ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc il faut un $\mathcal{O}$ — la relation o n'est vraie que pour $n \geqslant 1$!*
> *Par ailleurs, on s'est un peu simplifié la tâche en étudiant $te^{-(n+1)t}$, la variable t parcourant l'intervalle fermé $[0, +\infty[$, au lieu de $f(t,x)$, qui n'est définie que pour t dans l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.*

On a démontré **[2.]** que la fonction $[t \mapsto te^{-t}]$ était intégrable sur l'intervalle I. Par comparaison, la fonction $\left[t \mapsto te^{-(n+1)t}\right]$ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, la fonction s_n est bien intégrable sur l'intervalle I.

❧ Pour calculer l'intégrale de s_n, nous allons intégrer par parties.

Comme s_n est intégrable,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^{-(n+1)t}}_{v'(t)}\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\,dt$$

par définition de l'intégrale généralisée.

En tant qu'intégrale de référence,

$$\begin{aligned}\lim_{A \to +\infty} -\int_0^A 1 \cdot \frac{-e^{-(n+1)t}}{n+1}\,dt &= \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,dt \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Enfin, comme $n + 1 > 0$,

$$\lim_{A \to +\infty} \left[t \cdot \frac{-e^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^A = 0$$

par croissances comparées de A et de $e^{-(n+1)A}$.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\,dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et par conséquent,

$$\forall\,n \in \mathbb{N},\ \forall\,x \in [-1,1], \quad \int_0^{+\infty} s_n(t)\,dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

6. On reconnaît le terme général d'une série géométrique :

$$\forall\,t \in I,\ \forall\,x \in [-1,1], \quad s_n(t) = te^{-t} \cdot (xe^{-t})^n.$$

Comme $|x| \leqslant 1$ et que $t > 0$, la raison xe^{-t} est telle que la série géométrique converge absolument :

$$\forall\,t \in I,\ \forall\,x \in [-1,1], \quad |xe^{-t}| \leqslant e^{-t} < 1.$$

Par conséquent, la série de fonctions $\sum s_n$ converge simplement sur I et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= te^{-t} \cdot \frac{1}{1-(xe^{-t})} = \frac{t}{e^t - x} \\ &= f(t,x)\end{aligned}$$

quel que soit $(t,x) \in I \times \Omega$.

7. Comme $x \in [-1,1]$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et comme la série de Riemann $\sum {}^1/_{n^2}$ est convergente, on déduit du Théorème de comparaison que la série $\sum {}^{x^n}/_{n^2}$ est absolument convergente.

> *Comme le majorant trouvé est indépendant de $x \in [-1,1]$, on a en fait démontré que la série entière $\sum {}^{x^n}/_{n^2}$ était **normalement convergente** sur le segment $[-1,1]$.*

❧ Pour démontrer que la fonction L est développable en série entière sur $[-1,1]$ (puisque c'est de cela qu'il s'agit !), nous allons appliquer le Théorème d'intégration terme à terme.

On a démontré **[5.]** que $\sum s_n$ était une série de fonctions intégrables sur I.

On a vérifié **[6.]** que cette série de fonctions convergeait simplement sur l'intervalle I vers la fonction continue $[t \mapsto f(t,x)]$.

Comme les fonctions s_n sont positives,

$$\int_0^{+\infty} \left|s_n(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} s_n(t)\, dt \overset{[5.]}{=} \frac{x^n}{(n+1)^2}.$$

Or

$$\frac{x^n}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n^2}$$

et on a vérifié pour commencer que la série $\sum {}^{x^n}/_{n^2}$ était absolument convergente. Par conséquent, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|s_n(t)\right| dt$$

est convergente.

Le Théorème d'intégration terme à terme nous assure alors que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} s_n(t)\, dt$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(t,x)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}.$$

Finalement, on a bien

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(en multipliant par x).

8. Pour tout $x \in [-1,1]$, d'après **[7.]**,

$$L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1+(-1)^n]x^n}{n^2}.$$

Or $1+(-1)^n = 2$ pour tout entier n *pair* et $1+(-1)^n = 0$ pour tout entier n impair. Donc

$$L(x) + L(-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k^2}.$$

Comme $x^2 \in [0,1] \subset [-1,1]$, on peut utiliser le développement en série entière **[7.]** en substituant x^2 à x et en déduire que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

❧ **Variante.**

Pour $x \in [-1,1]$, on a $x \in \Omega$, $-x \in \Omega$ et $x^2 \in \Omega$, donc, par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales généralisées sont convergentes **[3.]**),

$$\begin{aligned}L(x) + L(-x) &= x\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - x} - \frac{t}{e^t + x}\, dt \\ &= \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(2t)}{e^{(2t)} - x^2} \cdot 2\, dt = \frac{1}{2}L(x^2)\end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $u = 2t$.

9. D'après **[7.]**,

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après **[8.]**,

$$L(-1) = \frac{1}{2}L(1) - L(1) = \frac{-L(1)}{2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

> *Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, donc la somme de la série $\sum {}^{(-1)^n}/_{n^2}$ est du signe du premier terme, c'est-à-dire négative. (Il est toujours bon de vérifier le signe d'une somme ou d'une intégrale.)*

Partie C. Une autre propriété de L

10. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

❧ **Régularité** — Il est clair que, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(t,x)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall\, (t,x) \in I \times \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{t}{(e^t - x)^2}.$$

❧ **Intégrabilité** — On a déjà démontré **[3.]** que la fonction $[t \mapsto f(t,x)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \,]-1,1[$.

Pour $t \in [0,+\infty[$ et $x \in \,]-1,1[$, on a $e^t \geqslant 1 > x$, donc la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{t}{(e^t - x)^2}\right]$$

est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et comme

$$\frac{t}{(e^t - x)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-2t},$$

on déduit des arguments déjà présentés au **[5.]** que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{t}{(e^t - x)^2}\right]$$

est intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$.

❧ **Domination** — Soit $0 < a < 1$. Pour tout $t \in I$ et tout $x \in [-a, a]$,

$$0 < e^t - a \leqslant e^t - x$$

donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| = \frac{t}{(e^t - x)^2} \leqslant \frac{t}{(e^t - a)^2} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, a)\right|.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [-a, a]$ et, comme on vient de le démontrer, il est intégrable sur I.

D'après le Théorème de dérivation, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x)\, dt\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\bigcup_{0<a<1} [-a, a] =]-1, 1[$$

et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{+\infty} f(t, x) dt\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(e^t - x)^2} dt.$$

❧ Par produit, on en déduit que L est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et que

$$\begin{aligned} L'(x) &= 1 \cdot \int_0^{+\infty} f(t, x)\, dt + x \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t}{(e^t - x)^2}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t - x)^2}\, dt \end{aligned}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$.

❧ Supposons tout d'abord que $0 < |x| < 1$ pour calculer cette intégrale.

On intègre d'abord par parties (l'existence des limites ne pose aucune difficulté, la convergence de toutes les intégrales généralisées a déjà été prouvée) :

$$\begin{aligned} L'(x) &= \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{e^t}{(e^t - x)^2}\, dt \\ &= \left[t \cdot \frac{-1}{e^t - x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{-1}{e^t - x}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{1 - xe^{-t}}. \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variable $u = e^{-t}$: la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ réalise une bijection (strictement décroissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1[$, donc

$$L'(x) = \int_0^1 \frac{du}{1 - xu} = \frac{-1}{x}\big[\ell n(1 - xu)\big]_0^1$$

et finalement

$$\forall\, 0 < |x| < 1, \qquad L'(x) = \frac{-\ell n(1 - x)}{x}.$$

❧ On sait que L est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$, donc sa dérivée L' est en particulier continue en 0 et

$$L'(0) = \lim_{x \to 0} L'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\ell n(1 - x)}{x} = 1$$

puisque $\ell n(1 - x) \sim -x$ quand x tend vers 0.

11. On a démontré **[10.]** que L était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$. Sur $]0, 1[$, la fonction $[x \mapsto 1 - x]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et prend ses valeurs dans $]0, 1[\subset]-1, 1[$, donc par composition et combinaison linéaire, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$.

Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x) - L'(1 - x) + \frac{\ell n(1 - x)}{x} - \frac{\ell n\, x}{1 - x} \\ &= \left[L'(x) + \frac{\ell n(1 - x)}{x}\right] \\ &\quad - \left[L'(1 - x) + \frac{\ell n\big(1 - (1 - x)\big)}{1 - x}\right] \\ &\overset{[10.]}{=} 0. \end{aligned}$$

Comme h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée est identiquement nulle sur <u>l'intervalle</u> $]0, 1[$, c'est une fonction constante.

12. Puisque h est constante **[11.]** sur l'intervalle $]0, 1[$,

$$\forall\, x \in]0, 1[, \quad h(x) = \lim_{y \to 0} h(y).$$

Comme L est continue sur Ω et que $[0, 1] \subset \Omega$,

$$\lim_{y \to 0}\big[L(y) + L(1 - y)\big] = L(0) + L(1).$$

Enfin,

$$\ell n(1 - y)\, \ell n\, y \underset{y \to 0}{\sim} y\, \ell n\, y \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

Donc, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h(x) = L(0) + L(1) \overset{[7.]}{=} 0 + L(1) \overset{[9.]}{=} \frac{\pi^2}{6}.$$

❧ On remarque que

$$\frac{t}{2e^t - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{e^t - 1/2} = \frac{1}{2} \cdot f(t, 1/2).$$

Donc **[3.]** l'intégrale est bien définie et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\, dt}{2e^t - 1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t, 1/2)\, dt = L(1/2).$$

D'après **[11.]** avec $x = 1/2 \in]0, 1[$,

$$L(1/2) + L(1 - 1/2) + \ell n(1/2)\, \ell n(1 - 1/2) = \frac{\pi^2}{6}$$

soit

$$2L(1/2) + (\ell n\, 2)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\, dt}{2e^t - 1} = L(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ell n^2\, 2}{2}.$$

Solution II ❀ Puissances de matrices

Partie A. Un cas particulier

1. a. Il suffit de remarquer que

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}^2,\quad M(a,b)=(b-a)I_n+aM(1,1),$$

ce qui prouve que la matrice $M(a,b)$ est un polynôme en $M(1,1)$. D'après le cours, si V est un vecteur propre de $M(1,1)$ associé à la valeur propre λ, alors V est aussi un vecteur propre de $P[M(1,1)]$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$, quel que soit le polynôme P.

> *On peut aussi poser le calcul :*
>
> $$\begin{aligned}M(a,b)V&=(b-a)V+aM(1,1)V\\&=(b-a)V+a\cdot\lambda V=(b-a+\lambda a)V.\end{aligned}$$

1. b. Si $a\neq 0$, alors

$$M(1,1)=\frac{a-b}{a}I_n+\frac{1}{a}M(a,b)$$

est un polynôme en $M(a,b)$ et la réciproque est vraie : tout vecteur propre de $M(a,b)$ est aussi un vecteur propre de la matrice $M(1,1)$.

❧ Si $a=0$, alors $M(0,b)=bI_n$ est une homothétie, donc tout vecteur **non nul** $V\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(0,b)$. Comme la matrice $M(1,1)$ n'est pas diagonale, les vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ne sont pas tous des vecteurs propres de $M(1,1)$: il existe donc des vecteurs propres de $M(0,b)$ qui ne sont pas des vecteurs propres de $M(1,1)$.

❧ La réciproque est donc vraie si, et seulement si, $a\neq 0$.

2. Par hypothèse, $M(1,1)V=\lambda V$ et comme $\lambda\neq 0$,

$$V=\frac{1}{\lambda}\cdot M(1,1)V=M(1,1)\big(\lambda\cdot V\big)\in\operatorname{Im}M(1,1).$$

❧ La matrice $M(1,1)$ est une matrice de rang 1 et son image est la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$V_0=(1,1,\dots,1).$$

> *On identifie les vecteurs colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ aux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ (pour éviter de perdre de la place).*

On vérifie alors sans peine que

$$MV_0=nV_0,$$

ce qui prouve que le vecteur V_0 (*qui n'est pas nul*...) est un vecteur propre de $M(1,1)$ associé à la valeur propre n.

Par **[1.]**, le complexe $(b-a+na)$ est une valeur propre de $M(a,b)$.

3. Soit $V\in\operatorname{Ker}M(1,1)$, un vecteur non nul. Par définition,

$$M(1,1)V=0$$

et, d'après **[1.]**,

$$M(a,b)V=(b-a)V.$$

Donc tout vecteur **non nul** de $\operatorname{Ker}M(1,1)$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $(b-a)$.

❧ Comme le rang de $M(1,1)$ est égal à 1, son noyau est un hyperplan de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (Théorème du rang).

La multiplicité d'une valeur propre est toujours supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé, donc la multiplicité de $(b-a)$ en tant que valeur propre de $M(a,b)$ est au moins égale à $(n-1)$.

4. Si $a=0$, alors $M(a,b)$ est une matrice diagonale. Donc diagonalisable. *Et pis c'est tout.*

❧ Si $a\neq 0$, alors on connaît deux valeurs propres de $M(a,b)$:

- d'après **[2.]**, le scalaire $\lambda_1=b+(n-1)a$ est une valeur propre de $M(a,b)$ et, comme toujours, la dimension du sous-espace propre associé est au moins égale à 1 ;
- d'après **[3.]**, le scalaire $\lambda_2=(b-a)$ est une valeur propre de $M(a,b)$ et la dimension du sous-espace propre associé est au moins égale à $(n-1)$.

La somme des dimensions de ces deux sous-espaces propres est donc supérieure à

$$1+(n-1)=n=\dim\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}),$$

ce qui prouve que la matrice $M(a,b)$ est diagonalisable et qu'elle n'admet pas d'autre valeur propre.

Plus précisément, la matrice $M(a,b)$ est semblable à la matrice

$$\Delta_{a,b}=\operatorname{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_2)\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

> *Pour la fin de cette partie, on notera M au lieu de $M(a,b)$ (pour gagner en lisibilité).*

5. Le polynôme caractéristique de la matrice diagonale $\Delta_{a,b}$ est évidemment égal à

$$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^{n-1}.$$

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc

$$P_{a,b}=\big(X-(b-a)\big)^{n-1}\big(X-b-(n-1)a\big).$$

❧ Le polynôme $Q_{a,b}$ vérifie par construction

$$Q_{a,b}(\lambda_1)=Q_{a,b}(\lambda_2)=0.$$

Comme la matrice $\Delta_{a,b}$ est diagonale,

$$\begin{aligned}Q_{a,b}(\Delta_{a,b})&=\operatorname{Diag}\big(Q_{a,b}(\lambda_1),Q_{a,b}(\lambda_2),\dots,Q_{a,b}(\lambda_2)\big)\\&=\operatorname{Diag}(0,0,\dots,0)=0_n.\end{aligned}$$

Comme $M=M(a,b)$ et $\Delta_{a,b}$ sont semblables, alors les matrices $P(M)$ et $P(\Delta_{a,b})$ sont semblables, quel que soit le polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$.

> *Quelle que soit la matrice inversible $A\in GL_n(\mathbb{K})$, l'application*
>
> $$\big[M\mapsto A^{-1}MA\big]$$
>
> *est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

En particulier pour $P=Q_{a,b}$, la matrice $Q_{a,b}(M)$ est semblable à la matrice $Q_{a,b}(\Delta_{a,b})=0_n$ et donc en fait *égale* à la matrice nulle. Autrement dit, $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de M.

> *Si $a \neq 0$, alors $Q_{a,b}$ est le polynôme minimal de $M(a, b)$. En revanche, si $a = 0$, le polynôme minimal de $M(0, b)$ est égal à $(X - b)$ alors que $Q_{0,b} = (X - b)^2$.*

❧ **Variante —** Comme M est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et (comme toujours) ses racines sont les valeurs propres de M. On a démontré que M admettait au plus deux valeurs propres : λ_1 et λ_2 (qui sont égales si $a = 0$, méfiance !), donc le polynôme minimal divise le polynôme

$$Q_{a,b} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2),$$

donc $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M = M(a, b)$.

6. Comme le degré de $Q_{a,b}$ est égal à 2, le reste R_k de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$ est un polynôme dont le degré est inférieur à 1. Par conséquent, il existe un polynôme Q_k et deux scalaires α et β tels que

$$X^k = Q_k Q_{a,b} + R_k \quad \text{avec} \quad R_k = \alpha_k(X - b + a) + \beta_k.$$

> *Personne n'a dit qu'il fallait toujours décomposer un polynôme dans la base canonique ! Surtout quand une base est beaucoup mieux adaptée aux calculs à mener que la base canonique.*

Comme $Q_{a,b}$ admet λ_1 et λ_2 pour racines,

$$\begin{cases} \lambda_1^k = \alpha_k(\lambda_1 - b + a) + \beta_k = na\alpha_k + \beta_k \\ \lambda_2^k = \alpha_k(\lambda_2 - b + a) + \beta_k = \beta_k. \end{cases}$$

Il s'agit ici d'un système linéaire en les deux inconnues α_k et β_k. On en déduit facilement que

$$R_k = \frac{(b - a + na)^k - (b - a)^k}{na}(X - b + a) + (b - a)^k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❧ On substitue ensuite la matrice M à l'indéterminée X. Comme $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de M, on a donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = Q_k(M) \times \underbrace{Q_{a,b}(M)}_{=0_n} + R_k(M)$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k &= R_k(M) \\ &= \alpha_k\big[M - (b - a)I_n\big] + \beta_k I_n \\ &= \alpha_k M + \big[\beta_k - (b - a)\alpha_k\big] I_n \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_k = \frac{(b - a + na)^k - (b - a)^k}{na}, \quad \beta_k = (b - a)^k.$$

7. Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

Comme $|b - a| < 1$ et que $|b + -a + na| < 1$, les deux suites complexes $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.

Par inégalité triangulaire et homogénéité, on déduit de la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\big\|M^k\big\| \leqslant |\alpha_k| \underbrace{\big\|M - (b - a)I_n\big\|}_{\text{Cte}} + |\beta_k| \underbrace{\big\|I_n\big\|}_{\text{Cte}},$$

ce qui prouve que

$$\lim_{k\to+\infty} \big\|M(a, b)^k\big\| = 0$$

(par encadrement) et donc que

$$\lim_{k\to+\infty} M(a, b)^k = 0_n$$

(par définition de la convergence des suites de matrices).

Partie B. Limite des puissances d'une matrice

8. Soit $x \in E$: il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(M_k - L)(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot (M_k - L)(e_j).$$

Par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$\big\|(M_k - L)(x)\big\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \big\|(M_k - L)(e_j)\big\|.$$

Par définition de la norme sur E,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad |x_j| \leqslant \|x\|$$

donc

$$\big\|(M_k - L)(x)\big\| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \big\|(M_k - L)(e_j)\big\|\right)\|x\|.$$

❧ On en déduit que, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$,

$$\big\|(M_k - L)(x)\big\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \big\|(M_k - L)(e_j)\big\|.$$

Comme le majorant ne dépend pas de x, on peut passer à la borne supérieure et obtenir ainsi :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|M_k - L\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \big\|(M_k - L)(e_j)\big\|.$$

Le majorant est une somme de n termes qui, tous, tendent vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \|M_k - L\| = 0.$$

> *Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E converge uniformément sur la sphère unité de E si, et seulement si, elle converge simplement sur E.*

9. Le vecteur $T(e_1)$ est la première colonne de la matrice T. Comme la matrice T est triangulaire supérieure, le vecteur e_1 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_1, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad T^k(e_1) = \lambda_1^k \cdot e_1$$

donc
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left\|T^k(e_1)\right\| = |\lambda_1|^k \, \|e_1\|.$$
Comme $|\lambda_1| < 1$ par hypothèse, on en déduit que cette suite géométrique tend vers 0, donc
$$\lim_{k\to+\infty} \left\|T^k(e_1)\right\| = 0.$$

10. a. Le vecteur $T(e_{i+1})$ est la $(i+1)$-ème colonne de la matrice T, donc
$$T(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$$
avec
$$x = \sum_{j=1}^{i} t_{j,i+1} \cdot e_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

> *La formulation de la question peut troubler : il n'y a pas d'ambiguité sur l'existence du vecteur* x*, il ne peut s'agir que du vecteur*
> $$T(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$
> *(What else ?) La bonne question à se poser est donc de savoir si ce vecteur appartient, ou non, au sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

10. b. Nous allons procéder par récurrence. Supposons donc qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$T^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x). \qquad (\mathrm{HR}_k)$$

❧ **Hérédité**
$$\begin{aligned} &T^{k+1}(e_{i+1}) \\ &\quad= T\big(T^k(e_{i+1})\big) \\ &\quad\overset{\mathrm{HR}_k}{=} \lambda_{i+1}^k \cdot T(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-(m+1)} \cdot T^{m+1}(x) \\ &\quad\overset{\mathrm{HR}_1}{=} \lambda_{i+1}^k \cdot \big[\lambda_{i+1} \cdot e_{i+1} + x\big] + \sum_{m=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} \cdot T^m(x) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m \leftarrow m+1) \\ &\quad= \lambda_{i+1}^{k+1} \cdot e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} \cdot T^m(x) \end{aligned}$$
puisque $\lambda_{i+1}^{k-0} \cdot T^0(x) = \lambda_{i+1}^k \cdot x$.

❧ **Initialisation** — D'après la question précédente, la propriété (HR_1) est vraie.

❧ La propriété (HR_k) est donc vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

11. a. Comme $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ tels que
$$x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j \cdot e_j.$$
Par linéarité,
$$T^m(x) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j \cdot T^m(e_j)$$
et par inégalité triangulaire,
$$\left\|T^m(x)\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j| \left\|T^m(e_j)\right\| \leqslant \|x\| \sum_{j=1}^{i} \left\|T^m(e_j)\right\|$$
puisque $|\alpha_j| \leqslant \|x\|$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$ (par définition de la norme produit).

Par hypothèse de récurrence,
$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant i, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\|T^k(e_j)\right\| = 0.$$
Une combinaison linéaire de suites de limite nulle est encore une suite de limite nulle, donc, par encadrement,
$$\lim_{m\to+\infty} \left\|T^m(x)\right\| = 0.$$

❧ Par inégalité triangulaire et homogénéité, la norme étudiée
$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x) \right\|$$
est majorée par
$$\sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{(k-1)-m} \cdot \left\|T^m(x)\right\|.$$
Pour simplifier les expressions, nous allons poser
$$\alpha = |\lambda_{i+1}| \quad \text{et} \quad u_m = \left\|T^m(x)\right\|$$
et démontrer que la suite de terme général
$$\sigma_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha^{k-m} u_m$$
tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ en supposant seulement que $0 \leqslant \alpha < 1$ et que la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle.

> *La démonstration qui suit est inspirée de la démonstration du Théorème de Cesaro.*

❧ Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall\, n \geqslant N, \qquad 0 \leqslant u_m \leqslant \varepsilon$$
et comme toute suite convergente est bornée, il existe une constante M_0 telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_m \leqslant M_0.$$
Alors, pour tout entier $k > N$,
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sigma_k &\leqslant \sum_{m=0}^{N-1} \alpha^{k-m} u_m + \sum_{m=N}^{k} \alpha^{k-m} u_m \\ &\leqslant M_0 \sum_{m=0}^{N-1} \alpha^{k-m} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k} \alpha^{k-m} \\ &\leqslant M_0 \sum_{\ell=k-N+1}^{k} \alpha^{\ell} + \varepsilon \sum_{\ell=0}^{k-N} \alpha^{\ell} \qquad (\ell = k-m) \\ &\leqslant M_0 \sum_{\ell=k-N+1}^{+\infty} \alpha^{\ell} + \varepsilon \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^{\ell} \end{aligned}$$

puisque $\sum \alpha^\ell$ est une série *convergente* de terme général positif.

> *Pour toute série convergente de terme général positif, chaque somme partielle est majorée par la somme.*

L'entier N étant fixé,

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{\ell=k-N+1}^{+\infty} \alpha^\ell = 0$$

(reste d'une série convergente). Donc il existe un rang K_0 tel que

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad 0 \leqslant \sum_{\ell=k-N+1}^{+\infty} \alpha^\ell \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi démontré qu'il existait une constante

$$M_1 = M_0 + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell$$

telle que

$$\forall\, k > \max\{N, K_0\}, \quad 0 \leqslant \sigma_k \leqslant M_1 \varepsilon$$

et donc que la suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendait vers 0.

❧ En conclusion, on a bien démontré que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x) \right\| = 0.$$

11. b. Par inégalité triangulaire, on déduit de **[10.b.]** que

$$\left\|T^k(e_{i+1})\right\| \leqslant |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{(k-1)-m} T^m(x) \right\|$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Le facteur $|\lambda_{i+1}|^k$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ car $|\lambda_{i+1}| < 1$ (suite géométrique) et comme le cofacteur $\|e_{i+1}\|$ est indépendant de k, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} |\lambda_{i+1}|^k \, \|e_{i+1}\| = 0.$$

Avec **[11.a.]**, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|T^k(e_{i+1})\right\| = 0$$

par encadrement (une norme est toujours positive).

12. Avec **[9.]** et **[11.b.]**, on a démontré par récurrence que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\|T^k(e_j)\right\| = 0.$$

> *Il s'agit d'une récurrence finie : l'indice i vérifie $1 \leqslant i < n$ dans l'hypothèse de récurrence (obligeamment fournie par l'énoncé avant la question* **[10.a.]***) et c'est aussi un récurrence "forte" puisque l'hypothèse de récurrence porte sur les indices $1 \leqslant j \leqslant i$.*
> *Comme toujours, la conclusion est alors vraie pour tous les indices $1 \leqslant i \leqslant n$ (en particulier pour $i = n$).*

D'après **[8.]** avec $M_k = T^k$ et $L = 0_n$, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} \|T^k\| = 0$$

c'est-à-dire (par définition de la convergence des matrices)

$$\lim_{k\to+\infty} T^k = 0_n.$$

13. Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable : il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q telles que

$$Q^{-1}AQ = T.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = QT^kQ^{-1}$$

et donc que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k\| \leqslant \|Q\| \, \|Q^{-1}\| \, \|T^k\|$$

puisque la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative.

Le produit $\|Q\| \, \|Q^{-1}\|$ est indépendant de $k \in \mathbb{N}^*$. On déduit donc de **[12.]** que

$$\lim_{k\to+\infty} \|A^k\| = 0$$

et donc que

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n.$$

Partie C. Méthode de Gauss-Seidel

14. Par hypothèse, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$|a_{k,k}| > \sum_{\ell\neq k} |a_{k,\ell}| \geqslant 0,$$

donc aucun scalaire $a_{k,k}$ n'est nul.

Comme la matrice M est, par définition, triangulaire et que ses coefficients diagonaux (les $a_{k,k}$) sont tous différents de 0, la matrice M est inversible.

15. Par définition,

$$y = Ax = (M - F)x = Mx - Fx.$$

Comme M est inversible, en multipliant *à gauche* par M^{-1}, on en déduit que

$$M^{-1}y = M^{-1}Mx - M^{-1}Fx = x - Bx.$$

16. Par définition de B et de ν,

$$B\nu = \lambda\nu = (M^{-1}F)\nu.$$

En multipliant *à gauche* par M, on en déduit que

$$F\nu = M(\lambda\nu) = \lambda M\nu.$$

❧ Par définition de M et de F,

$$F\nu = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad w_k = -\sum_{\ell=k+1}^{n} a_{k,\ell}\nu_\ell.$$

et

$$Mv = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad w'_k = \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell} v_\ell$$

Comme $Fv = \lambda M v$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad -\sum_{\ell=k+1}^{n} a_{k,\ell} v_\ell = \lambda \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell} v_\ell$$

et, en isolant le coefficient diagonal ($\ell = k$), on obtient

$$\lambda a_{k,k} v_k = -\Big(\sum_{\ell=k+1}^{n} a_{k,\ell} v_\ell + \lambda \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{k,\ell} v_\ell \Big)$$

pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

17. La famille $(|v_k|)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille finie de réels positifs, donc elle admet un plus grand élément : il existe donc un indice $1 \leqslant k_0 \leqslant n$ tel que

$$|v_{k_0}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |v_k|.$$

Si $v_{k_0} = 0$, alors tous les v_k sont nuls et v serait le vecteur nul : c'est impossible puisque, par hypothèse, v est un vecteur propre de B et qu'**un vecteur propre n'est jamais nul**. Donc

$$|v_{k_0}| > 0.$$

❧ On peut donc appliquer l'inégalité triangulaire à l'égalité obtenue en **[16.]** pour $k = k_0$ et diviser ensuite par $|v_{k_0}| > 0$.

$$|\lambda a_{k_0,k_0}| \leqslant \sum_{\ell=k_0+1}^{n} |a_{k_0,\ell}| \frac{|v_\ell|}{|v_{k_0}|} + |\lambda| \sum_{\ell=1}^{k_0-1} |a_{k_0,\ell}| \frac{|v_\ell|}{|v_{k_0}|}$$

Par définition de k_0,

$$\forall\, 1 \leqslant \ell \leqslant n, \quad 0 \leqslant \frac{|v_\ell|}{|v_{k_0}|} \leqslant 1$$

donc

$$|\lambda a_{k_0,k_0}| \leqslant \sum_{\ell=k_0+1}^{n} |a_{k_0,\ell}| + |\lambda| \sum_{\ell=1}^{k_0-1} |a_{k_0,\ell}|.$$

18. Comme A est une matrice à diagonale fortement dominante, si $\lambda \neq 0$,

$$|\lambda| \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k_0}} |a_\ell| < |\lambda|\, |a_{k_0,k_0}|$$

et d'après **[17.]**,

$$|\lambda| \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k_0}} |a_\ell| < \sum_{\ell=k_0+1}^{n} |a_{k_0,\ell}| + |\lambda| \sum_{\ell=1}^{k_0-1} |a_{k_0,\ell}|.$$

Par différence, on en déduit que

$$0 < (1 - |\lambda|) \sum_{\ell=k_0+1}^{n} |a_{k_0,\ell}|.$$

Comme le second facteur est positif, le premier facteur est strictement positif.

On a ainsi démontré que, si $\lambda \neq 0$, alors $|\lambda| < 1$.

Et si $\lambda = 0$, il est clair que $|\lambda| < 1$ également !

❧ La matrice B est une matrice complexe dont toutes les valeurs propres sont strictement inférieures à 1 en module, donc **[13.]** la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

19. D'après la définition des colonnes X_k et **[15.]**,

$$X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y \quad \text{et} \quad x = Bx + M^{-1}y.$$

On en déduit par différence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} - x = B(X_k - x).$$

Par récurrence immédiate (c'est une sorte de suite géométrique),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_k - x = B^k (X_0 - x).$$

❧ Puisque la norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est subordonnée à la norme sur E, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|X_k - x\| \leqslant \|B^k\|\, \|X_0 - x\|.$$

D'après **[18.]**, la suite (B^k) converge vers la matrice nulle, donc la suite réelle

$$\big(\|B^k\|\big)_{k \in \mathbb{N}}$$

tend vers 0 (définition de la convergence dans l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$). Comme le cofacteur $\|X_0 - x\|$ est constant, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \|X_k - x\| = 0$$

(par encadrement) et donc que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution x de l'équation considérée.