> *Soient* $A$ *et* $B$*, deux évènements. Si*
> $$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B^c),$$
> *alors ces deux probabilités conditionnelles sont égales à* $\mathbf{P}(A)$ *et les évènements* $A$ *et* $B$ *sont indépendants.*

On décompose $A$ dans le système complet d'évènements $(B, B^c)$ : comme

$$A = [A \cap B] \sqcup [A \cap B^c],$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B^c) &= \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \mid B^c)\,\mathbf{P}(B^c)\\ &= \mathbf{P}(A \mid B)\big[\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(B^c)\big] \qquad \text{(car } \mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid B^c)\text{)}\\ &= \mathbf{P}(A \mid B).\end{aligned}$$

On en déduit que
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$
et donc que les deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants.

✍ *Attention, cet exercice est assez astucieux : si on s'y prend de la bonne manière, la démonstration est simple et rapide — mais si on part d'une autre manière, on risque de tourner en rond un certain temps...*