Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. *Pour toute variable aléatoire réelle* X,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|X| \geqslant n) = 0.$$

2. *On suppose que* X *est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans l'ensemble (fini ou dénombrable)* $E \subset \mathbb{R}$. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$E_n = \{x \in E \ : \ n \leqslant |x| < n+1\} \quad et \quad \sigma_n = \sum_{x\in E_n} |x|\,\mathbf{P}(X = x).$$

Alors la série $\sum \sigma_n$ *est convergente et comme*

$$n\,\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = n\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X \in E_k) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \sigma_k,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\,\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = 0.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[|X| \geqslant n]$ est un évènement en tant qu'image réciproque de l'intervalle $[n, +\infty[$ par la variable aléatoire $|X|$.

✍ *On peut aussi décomposer cet ensemble en une union, finie ou dénombrable, d'évènements :*

$$\big[|X| \geqslant n\big] = \bigsqcup_{\substack{x\in E\\ |x|\geqslant n}} [X = x].$$

Rappelons que $[X = x] \in \mathcal{A}$ *pour tout* x *par hypothèse (puisque* X *est est une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*).*

❧ *Dans la suite de l'exercice, toutes les parties de* Ω *considérées pourront s'exprimer au moyen du système complet d'évènements associé à la variable aléatoire* X *(= comme une union finie ou dénombrable d'évènements de la forme* $[X = x]$*) et appartiendront donc bien à la tribu* $\mathcal{A}$.

On n'exposera pas les détails.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad \big|X(\omega)\big| \geqslant n+1 \implies \big|X(\omega)\big| \geqslant n$$

donc

$$\big[|X| \geqslant n+1\big] \subset [|X| \geqslant n].$$

La famille $([|X| \geqslant n])_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante d'évènements.

❧ Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$, on sait alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(|X| \geqslant n\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [|X| \geqslant n]\Big).$$

Mais $|X(\omega)| \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \exists\, n \in \mathbb{N}, \qquad \big|X(\omega)\big| < n$$

donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [|X| \geqslant n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [|X| < n]^c = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [|X| < n]\Big)^c = \Omega^c = \varnothing$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(|X| \geqslant n\big) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

2. Pour tout $x \in E$, le réel $|x|$ est positif, donc il existe un, et un seul, entier naturel $n = \lfloor |x| \rfloor$ tel que $|x| \in E_n$. On dispose donc d'une partition de l'ensemble E :

$$E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

❧ Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors la famille $\big(x\,\mathbf{P}(X=x)\big)_{x\in E}$ est sommable (définition de l'espérance).

Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable, donc la famille

$$\big(x\,\mathbf{P}(X=x)\big)_{x\in E_n}$$

est sommable pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que chaque somme σ_n est bien définie.

Comme les ensembles E_n forment une partition de E, on déduit du Théorème de Fubini que la famille $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est sommable. Autrement dit, la série $\sum \sigma_n$ (de terme général positif) est convergente.

✍ *Le Théorème de Fubini nous dit aussi que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = \sum_{x\in E} |x|\,\mathbf{P}(X=x) = \mathbf{E}(|X|)$$

mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété ici.

❧ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \big|X(\omega)\big| \geqslant n &\iff \exists!\, k \geqslant n, \quad k \leqslant \big|X(\omega)\big| < k+1 \\ &\iff \exists!\, k \geqslant n, \quad X \in E_k. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$[|X| \geqslant n] = \bigsqcup_{k\geqslant n} [X \in E_k].$$

On a décomposé l'évènement $[|X| \geqslant n]$ en une union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints. Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que la famille $\big(\mathbf{P}(X \in E_k)\big)_{k\geqslant n}$ est sommable et que

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(X \in E_k).$$

❧ Soit $k \geqslant n$. Comme d'habitude,

$$[X \in E_k] = \bigsqcup_{x\in E_k} [X = x].$$

Il s'agit à nouveau d'une union finie ou dénombrable d'évènements deux à deux disjoints, donc, à nouveau par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(X \in E_k) = \sum_{x\in E_k} \mathbf{P}(X = x).$$

Par définition de l'ensemble E_k, on a $|x| \geqslant k \geqslant n$ pour tout $x \in E_k$, donc

$$\forall\, x \in E_k, \qquad n\,\mathbf{P}(X=x) \leqslant |x|\,\mathbf{P}(X=x).$$

En sommant sur $x \in E_k$, on en déduit que

$$n\,\mathbf{P}(X \in E_k) = \sum_{x\in E_k} n\,\mathbf{P}(X=x) \leqslant \sum_{x\in E_k} |x|\,\mathbf{P}(X=x) = \sigma_k.$$

❧ En sommant sur $k \geqslant n$, on en déduit que

$$0 \leqslant n\,\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X \in E_k) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \sigma_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme la série $\sum \sigma_k$ est convergente, son reste tend vers 0 et, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} n\,\mathbf{P}(|X| \geqslant n).$$

✍ *L'inégalité de Markov,* sous les mêmes hypothèses, *nous dit seulement que*

$$n\,\mathbf{P}(|X| \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1),$$

ce qui est sensiblement moins précis !