> *Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$ et X, une variable aléatoire d'espérance finie. On suppose que la variable $\varphi(X)$ est d'espérance finie.*
>
> **1.** *Il existe un réel a tel que*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geqslant a\big[x - \mathbf{E}(X)\big] + \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big).$$
>
> **2.** *Démontrer l'inégalité de Jensen :*
>
> $$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big) \geqslant \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big).$$
>
> *On en déduit que $\mathbf{E}(X^2) \geqslant [\mathbf{E}(X)]^2$ pour toute variable aléatoire d'espérance finie.*

1. Comme φ est convexe et de classe $\mathscr{C}^1$, en chaque point son graphe est situé au-dessus de sa tangente :

$$\forall\, x_0, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0).$$

En particulier, avec $x_0 = \mathbf{E}(X)$ et $a = \varphi'(x_0)$, on obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geqslant a\big[x - \mathbf{E}(X)\big] + \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big).$$

✍ *Comme la fonction φ est convexe sur un intervalle ouvert, elle est en fait continue et admet, en tout point, une dérivée à gauche et une dérivée à droite. De plus, par convexité,*

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}, \quad f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$$

et on peut démontrer que, pour tout réel a compris entre $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + a \cdot (x - x_0).$$

*Les droites d'équation $y = a \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0)$ avec $f'_g(x_0) \leqslant a \leqslant f'_d(x_0)$ sont appelées **droites d'appui**.*

2. On applique la majoration précédente pour $x = X(\omega)$:

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \varphi\big(X(\omega)\big) \leqslant a \cdot \big(X - \mathbf{E}(X)\big) + \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big).$$

Comme l'espérance conserve les inégalités, on en déduit que

$$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big) \leqslant \mathbf{E}\big[a \cdot \big(X - \mathbf{E}(X)\big) + \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big)\big] = a\,\mathbf{E}\big[X - \mathbf{E}(X)\big] + \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big) = \varphi\big(\mathbf{E}(X)\big)$$

par linéarité.

✍ *Quelle que soit la variable aléatoire X d'espérance finie, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est <u>centrée</u>.*
Par ailleurs, si Y est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à b, alors $\mathbf{E}(Y) = b$.

❧ Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, la variable aléatoire X^2 n'est pas forcément d'espérance finie, mais elle est positive.

Si X^2 est d'espérance finie, on peut appliquer l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $\big[t \mapsto t^2\big]$.

Sinon, la convention habituelle fait que l'inégalité

$$\mathbf{E}(X^2) \geqslant \mathbf{E}(X)^2$$

est encore vraie, même si elle est dépourvue de tout intérêt.

✍ *Par convention, si Y est une variable aléatoire positive qui n'est pas d'espérance finie, son espérance est égale à $+\infty$. Et majorer par $+\infty$, ce n'est jamais faux — ni jamais utile.*