# Composition de Mathématiques

Le 23 janvier 2019 – De 13 heures à 17 heures

---

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.**

## ❖ I – Problème ❖

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note ici

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On notera I, l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum h_n x^n$. L'objet de ce problème est d'étudier les fonctions définies par

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n x^n}{n}.$$

On *admettra* que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**1.** Soit $n \geqslant 1$, un entier. Démontrer que

$$h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

**2.** Démontrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

**3.** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum h_n x^n$. En déduire l'intervalle I.

**4.** Calculer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \frac{x^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{h_n x^n}{n}.$$

**5.** Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction

$$g = [x \mapsto \ell n(1-x)].$$

**6.** Démontrer que la fonction

$$G = \left[x \mapsto \frac{\ell n(1-x)}{1-x}\right]$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Établir une relation entre G et H.

**7.** Soit L, la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

**7. a.** Exprimer L à l'aide de la fonction g.

**7. b.** Démontrer que L est développable en série entière et donner son développement. *On énoncera précisément le théorème utilisé.*

**7. c.** En déduire une relation entre $(T - S)$ et L.

**8.** Soit $0 < y < 1$.

**8. a.** Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du$$

est convergente et démontrer que

$$\int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du + S(y) = 0.$$

☞ *On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction* $g$.

**8. b.** Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du$$

est convergente et que

$$\int_0^1 \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

**8. c.** Démontrer que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ell n\, y \cdot \ell n(1-y).$$

**9.** Exprimer la valeur de $T(1/2)$ en fonction de $\pi$.

## ❖ II – Problème ❖

Dans tout le sujet, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les variables aléatoires étudiées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On notera $E = [\![1, N]\!]$, l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre 1 et N.

Quels que soient les entiers $k, n \geqslant 1$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On rappelle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_2(n) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

**1.** Soit $k \geqslant 1$, un entier. Démontrer que

$$\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

**2.** Soit $X$, une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = [\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant i).$$

On considère une famille $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, qui suivent toutes la loi uniforme sur $E$ :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}.$$

On pose alors

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad U_k(\omega) = \min\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\},$$
$$V_k(\omega) = \max\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\}.$$

**3. a.** Démontrer que

$$\forall\, i \in E, \quad [U_k \geqslant i] \in \mathcal{A} \quad \text{et que} \quad [V_k \leqslant i] \in \mathcal{A}.$$

**3. b.** En déduire que

$$\forall\, i \in E, \quad [U_k = i] \in \mathcal{A} \quad \text{et que} \quad [V_k = i] \in \mathcal{A}.$$

Que signifient ces propriétés ?
**4.** Calculer la fonction génératrice de $X_1$.
**5.** Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de $N$.
**6.** On se propose dans cette question de simuler les variables aléatoires $V_k$ pour $N = 10$ et $1 \leqslant k \leqslant K_0 = 100$.

On rappelle que des appels répétés à l'instruction `random.randint(1,10)` simulent correctement le comportement de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $E = [\![1, 10]\!]$.

Ainsi, la fonction `simul_X`, dont le code figure ci-dessous, renvoie une liste de longueur $K_0 = 100$ de réalisations des variables $X_1, \dots, X_{100}$.

```
def simul_X(N, K_0):
  L = []
  for i in range(K_0):
    L.append(random.randint(1,N))
  return L
```

Utiliser la fonction `simul_X` pour écrire une fonction `real_V(N, K_0)` qui retourne une liste de longueur $K_0$ de réalisations des variables $V_1, \dots, V_{K_0}$.
**7.** Soit $k \geqslant 2$, un entier.
**7. a.** Démontrer que, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathbf{P}(U_k \geqslant i) = \left(\frac{N - i + 1}{N}\right)^k.$$

**7. b.** On exécute la fonction `real_V(10,100)` plusieurs fois. À chaque fois, on constate que la liste obtenue se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement cette observation.
**7. c.** Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de $N$ et de $S_k$. En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.
**8.** Soient $Z$ et $T$, deux variables aléatoires discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $V$. On sait que : quelle que soit l'application $\Phi : V \to W$ (où $W$ est aussi un ensemble fini ou dénombrable), les composées $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ sont des variables aléatoires discrètes.

On suppose que $Z$ et $T$ ont même loi. Démontrer que les variables $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ ont même loi.
**9.** Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$Y_i = N + 1 - X_i.$$

**9. a.** Démontrer que les $Y_i$ sont des variables aléatoires discrètes. Calculer leur espérance et leur variance.
**9. b.** Démontrer que le vecteur $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.
**9. c.** En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.
**10.** On considère ici le couple $(U_2, V_2)$.
**10. a.** Exprimer $U_2 + V_2$ et $U_2 V_2$ en fonction de $X_1$ et $X_2$.
**10. b.** En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2 V_2)$ en fonction de $N$. Expliquer brièvement comment on peut en déduire que :

$$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2 - 1)^2}{36 N^2}.$$

(Le calcul détaillé n'est pas demandé.)
**10. c.** Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de $N$.
**10. d.** Le **coefficient de corrélation** est défini par

$$\rho_2(N) = \frac{\mathbf{Cov}(U_2, V_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(U_2)\, \mathbf{V}(V_2)}}.$$

Que dire de $\rho_2(N)$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$ ?
**11. a.** On suppose que $X$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $E = [\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N} (2i - 1)\, \mathbf{P}(X \geqslant i).$$

**11. b.** Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de $N$ à l'aide des fonctions $S_k$ et $S_{k+1}$.
**11. c.** En déduire l'expression de $\mathbf{V}(U_k)$.
**11. d.** Calculer un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

## Solution I ❁ Séries entières

**1.** Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et comme

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout entier $n < k \leqslant 2n$, on en déduit que

$$h_{2n} - h_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

**2.** Le **nombre harmonique** $h_n$ est la $n$-ième somme partielle d'une série de terme général positif, donc la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. D'après le Théorème de la limite monotone, ou bien cette suite tend vers $+\infty$, ou bien elle converge vers un réel $\ell$.

Si $(h_n)$ convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite extraite $(h_{2n})_{n\geqslant 1}$ convergerait aussi vers $\ell$ et la différence $h_{2n} - h_n$ tendrait vers 0, ce qui contredirait **1.**

Par conséquent, la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On peut se lancer dans une comparaison somme/intégrale, mais c'est plus long à rédiger correctement et, surtout, cela montre qu'on n'a pas vu le rapport entre les deux questions.

**3.** Comme $h_n$ tend vers $+\infty$, la série $\sum h_n 1^n$ diverge grossièrement, ce qui prouve que le rayon de convergence est inférieur à 1.

D'autre part, $1/k \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$, donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant h_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Pour tout $0 < x < 1$, cela prouve que $h_n x^n = \mathcal{O}(nx^n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et comme, par croissances comparées, la suite $(nx^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, la suite $(h_n x^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, ce qui prouve que le rayon de convergence est supérieur à 1.

Le rayon de convergence est donc égal à 1. L'intervalle ouvert de convergence est égal à $]-R, R[$ (par définition), donc

$$I = ]-1, 1[.$$

**4.** Pour $x > 0$, on pose $u_n = x^n/n^2 > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

D'après la règle de D'Alembert,

- si $0 < x < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument ;
- si $x > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

☙ Pour tout $x > 0$, par **3.**,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{h_n}{n} x^n \leqslant x^n.$$

Si $0 < x < 1$, alors la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, donc la série $\sum \frac{h_n}{n} x^n$ est convergente (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif), ce qui prouve que le rayon de convergence est supérieur à 1.

Si $x > 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n} x^n$ diverge grossièrement (croissances comparées de $x^n$ et de $1/n$), donc la série $\sum \frac{h_n}{n} x^n$ diverge grossièrement elle aussi, ce qui prouve que le rayon de convergence est inférieur à 1.

☙ Finalement, les rayons de convergence des deux séries entières

$$\sum \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{h_n}{n} x^n$$

sont tous les deux égaux à 1.

**5.** On doit savoir que

$$\forall\, x \in ]-1, 1[, \quad \ell n(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

**6.** On doit aussi savoir que

$$\forall\, x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

D'après le Théorème du produit de Cauchy, le produit de deux fonctions développables en série entière sur $I = ]-1, 1[$ est aussi développable en série entière sur $I$ et de plus,

$$\forall\, x \in I, \quad \frac{\ell n(1 - x)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$$

où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

étant entendu que $a_0 = 0$, que $a_k = -1/k$ pour tout $k \geqslant 1$ et que $b_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On en déduit que $w_0 = 0$ et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} \cdot 1 = -h_n.$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in ]-1, 1[, \quad G(x) = -H(x).$$

**7. a.** En tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, la fonction $H$ est continue sur $I$ (et en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence — mais cela est sans importance ici). D'après le Théorème fondamental, la fonction $H$ admet donc des primitives sur $I$ et

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in I, \quad L(x) &= L(0) + \int_0^x H(t)\, dt \\
&= \int_0^x \frac{-\ell n(1 - t)}{1 - t}\, dt \qquad \text{par } \mathbf{6.} \\
&= \frac{\left[\ell n(1 - x)\right]^2}{2} = \frac{\left[g(x)\right]^2}{2}.
\end{aligned}$$

**7. b.** Comme la fonction $H$ est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1 d'après **3.**, ses primitives sont développables en série entière sur l'intervalle ouvert de convergence $I = ]-1, 1[$ et leurs développements s'obtiennent en primitivant terme à terme. En particulier,

$$\forall\, x \in I, \quad L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

**7. c.** D'après **4.**, toutes les séries qui apparaissent dans le calcul ci-dessous sont absolument convergentes.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}(T-S)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(h_n - \frac{1}{n}\Big)\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} h_{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

donc $(T-S)(x) = L(x)$ pour tout $x \in I$ par **7.b.**

**8. a.** Pour $0 < u < 1$, on pose

$$\varphi(u) = \frac{\ell n(1-u)}{u}.$$

La fonction $\varphi$ est évidemment continue sur $]0, 1[$. Lorsque $u$ tend vers $0$,

$$\varphi(u) \sim \frac{-u}{u} = -1$$

donc $\varphi$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1[$ (en posant $\varphi(0) = 1$). Elle est donc intégrable sur $]0, y]$ pour tout $0 < y < 1$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale.

❧ Pour $0 < u \leqslant y$,

$$\frac{\ell n(1-u)}{u} = \frac{g(u)}{u} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n}.$$

Comme le *segment* $[0, y]$ est contenu dans l'*intervalle ouvert de convergence* $I$ (puisque $0 < y < 1$), la série entière $\sum \frac{1}{n} u^{n-1}$ converge normalement sur le segment $[0, y]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^y \frac{u^{n-1}}{u}\, du \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2} = -S(y).\end{aligned}$$

**8. b.** On sait par **8.a.** que la fonction $\varphi$ est continue sur $]0, 1[$ et intégrable au voisinage de $0$.

Considérons le changement de variable *affine* $u = 1 - x$. Alors

$$\varphi(u) = \frac{\ell n\, x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \ell n\, x.$$

On sait que $\ell n$ est intégrable au voisinage de $0$. Par comparaison, l'expression $\frac{\ell n\, x}{1+x}$ est intégrable au voisinage de $x = 0$ et, d'après le Théorème de changement de variable (version affine !), la fonction $\varphi$ est intégrable au voisinage de $u = 1$.

Ainsi, la fonction $\varphi$ est intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale est donc convergente.

❧ Par définition des intégrales généralisées convergentes,

$$\int_0^1 \varphi(u)\, du = \lim_{y\to 1} \int_0^y \varphi(u)\, du = \lim_{y\to 1} -S(y)$$

d'après **8.a.**

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Comme le majorant est indépendant de $x$ et que c'est le terme général d'une série convergente, cela prouve que la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$. Par conséquent, sa somme $S$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et en particulier

$$\lim_{y\to 1} -S(y) = -S(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{6}.$$

Finalement, on a bien

$$\int_0^1 \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du = \frac{-\pi^2}{6}.$$

REMARQUE.— Il était possible (et pas plus long) aussi d'appliquer le Théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

**8. c.** D'après **8.b.** et la relation de Chasles,

$$S(1-y) - S(1) = \int_{1-y}^1 \frac{\ell n(1-v)}{v}\, dv.$$

Le changement de variable affine $v = 1 - u$ prouve alors que l'intégrale

$$\int_0^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\, du$$

est convergente et que

$$\int_0^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\, du = \int_{1-y}^1 \frac{\ell n(1-v)}{v}\, dv.$$

Pour $0 < x < y < 1$, on intègre par parties sur $[x, y]$ :

$$\int_x^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du = \big[\ell n\, u \cdot \ell n(1-u)\big]_x^y + \int_x^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\, du.$$

On fait maintenant tendre $x$ vers $0$, le réel $y$ restant fixé.

Il est clair que

$$\ell n\, x \cdot \ell n(1-x) \sim -x\, \ell n\, x \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par **8.a.**,

$$\int_x^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^y \frac{\ell n(1-u)}{u}\, du = -S(y).$$

Enfin, d'après le changement de variable précédent,

$$\int_x^y \frac{\ell n\, u}{1-u}\, du \xrightarrow[x\to 0]{} S(1-y) - S(1).$$

Par conséquent,

$$-S(y) = \ell n\, y \cdot \ell n(1-y) + S(1-y) - S(1)$$

c'est-à-dire
$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ell n\, y \cdot \ell n(1-y).$$

VARIANTE.— D'après **8.a.**, la fonction $\varphi$ étant prolongeable en une fonction continue sur $[0,1[$, on peut invoquer le Théorème fondamental pour la fonction S : cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et
$$\forall\, 0 < y < 1, \quad S'(y) = \frac{-\ell n(1-y)}{y}.$$

On en déduit que la fonction $\Phi$, définie par
$$\forall\, 0 < y < 1, \quad \Phi(y) = S(y) + S(1-y) + \ell n\, y \cdot \ell n(1-y)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée est identiquement nulle. Par conséquent, la fonction $\Phi$ est constante sur $]0,1[$. Comme $\ell n\, y \cdot \ell n(1-y)$ tend vers 0 lorsque $y$ tend vers 0 (justifié plus haut) et que la fonction S est continue sur le segment $[0,1]$ (**8.b.**),
$$\Phi(y) \xrightarrow[y\to 0]{} S(0) + S(1) + 0 = \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui prouve que $\Phi$ est identiquement égale à $\pi^2/6$ sur tout l'intervalle $]0,1[$.

**9.** Par **7.c.**, $(T-S)(1/2) = L(1/2)$. Par **8.c.**,
$$\frac{\pi^2}{6} = S(1/2) + S(1/2) + (\ell n\, 2)^2.$$

Enfin, par **7.a.**,
$$L(1/2) = \frac{(\ell n\, 2)^2}{2} = T(1/2) - \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi^2}{6} - (\ell n\, 2)^2\Big]$$

et donc
$$T(1/2) = \frac{\pi^2}{12}.$$

## Solution II ❀ Probabilités

**1.** On fait une comparaison somme/intégrale avec la fonction continue et *croissante* $\big[t \mapsto t^k\big]$ : une figure soignée et correctement légendée convainc que
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_0^n t^k\, dt \leqslant S_k(n) \leqslant \int_0^n t^k\, dt + n^k$$

et donc que
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \leqslant \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n}.$$

Comme le majorant et le minorant tendent vers une même limite, on déduit du Théorème d'encadrement que
$$\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

**2.** Comme la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre *fini* de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition,
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbf{P}(X=k).$$

Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = [\![1,N]\!]$,
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad [X \geqslant i] = \bigsqcup_{k=i}^{N} [X=k].$$

Par $\sigma$-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(X \geqslant i) = \sum_{k=i}^{N} \mathbf{P}(X=k).$$

Par conséquent,
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X \geqslant i) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=i}^{N} \mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X=k)\mathbb{1}_{(1\leqslant i\leqslant k\leqslant N)} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(X=k)\mathbb{1}_{(1\leqslant i\leqslant k\leqslant N)} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbf{P}(X=k) = \mathbf{E}(X).
\end{aligned}$$

**3. a.** Tous les $X_j$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, donc
$$[X_j \geqslant i] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [X_j \leqslant i] \in \mathcal{A}$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$.

❧ En considérant $U_k$ comme une fonction de $\Omega$ dans E,
$$U_k(\omega) \geqslant i \iff \forall\, 1 \leqslant j \leqslant k, \quad X_j(\omega) \geqslant i$$

et donc, en traduisant cette équivalence en égalité des images réciproques :
$$[U_k \geqslant i] = \bigcap_{j=1}^{k} [X_j \geqslant i] \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection (finie ou dénombrable).

❧ De même,
$$V_k(\omega) \leqslant i \iff \forall\, 1 \leqslant j \leqslant k, \quad X_j(\omega) \leqslant i$$

et donc
$$[V_k \leqslant i] = \bigcap_{j=1}^{k} [X_j \leqslant i] \in \mathcal{A}.$$

**3. b.** Comme $U_k : \Omega \to [\![1,N]\!]$, on déduit déjà de la question précédente que
$$[U_k = N] = [U_k \geqslant N] \in \mathcal{A}.$$

Par ailleurs, pour tout $1 \leqslant i < N$,

$$[U_k = i] = [U_k \geqslant i] \cap [U_k \geqslant i+1]^c \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection et passage au complémentaire.

De même,

$$[V_k = 1] = [V_k \leqslant 1] \in \mathcal{A}$$

et, pour tout $1 < i \leqslant N$,

$$[V_k = i] = [V_k \leqslant i] \cap [V_k \leqslant i-1]^c \in \mathcal{A}.$$

❧ Ces propriétés démontrent que les applications $U_k$ et $V_k$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E.

**4.** Par définition de la fonction génératrice,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_{X_1}(t) = \mathbf{E}(t^{X_1}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t^i.$$

**5.** Comme la variable aléatoire $X_1$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est d'espérance finie et admet un moment d'ordre deux. D'une part,

$$\mathbf{E}(X_1) = \sum_{i=1}^{N} i\,\mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}S_1(N) = \frac{N+1}{2}.$$

D'autre part, d'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{N} i^2\,\mathbf{P}(X_1 = i) = \frac{1}{N}S_2(N) = \frac{(2N+1)(N+1)}{6}.$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \big[\mathbf{E}(X_1)\big]^2 = \frac{N^2-1}{12}.$$

**6.** On réalise une simulation, qu'on affecte à une liste `X`. Il reste ensuite à calculer le max de chaque début de liste : la tranche `X[:i+1]` contient les valeurs $X_1, \dots, X_i$.

```
def real_V(N, K_0):
  X = simul_X(N, K_0)
  V = [max(X[:i+1]) for i in range(K_0)]
  return V
```

Et une version moins pythonienne, qui reprend l'algorithme élémentaire de calcul du maximum.

```
def real_V(N, K_0):
  X = simul_X(N, K_0)
  M, V = X[0], [X[0]]
  for i in range(1, K_0):
    x = X[i]   # nouvelle valeur
    if (x>M):  # comparaison au maximum connu
      M = x    # nouveau maximum
    V.append(M)
  return V
```

**7. a.** D'après **3.a.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U_k \geqslant i) &= \mathbf{P}(X_1 \geqslant i, \dots, X_k \geqslant i)\\ &= \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X_j \geqslant i) \qquad \text{(par indépendance)}\\ &= \prod_{j=1}^{k} \Big((N-i+1)\cdot\frac{1}{N}\Big) \qquad \text{(par 2.)}\\ &= \Big(\frac{N-i+1}{N}\Big)^k.\end{aligned}$$

**7. b.** Ici, $N = 10$ et, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$V_{k+1}(\omega) = \max\{V_k(\omega), X_{k+1}(\omega)\}$$

donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad V_k(\omega) \leqslant V_{k+1}(\omega) \leqslant 10$$

et donc

$$\bigcap_{k=k_1}^{K_0} [V_k = 10] = [V_{k_1} = 10].$$

Un raisonnement analogue au **7.a.** montre que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \mathbf{P}(V_k \leqslant i) = \Big(\frac{i}{N}\Big)^k$$

et donc que

$$\mathbf{P}(V_k = 10) = 1 - \mathbf{P}(V_k \leqslant 9) = 1 - \Big(\frac{9}{10}\Big)^k.$$

En particulier, avec $k_1 = 25$,

$$\mathbf{P}(V_{25} = V_{26} = \cdots = V_{100} = 10) = 1 - \Big(\frac{9}{10}\Big)^{25} \approx 93\%.$$

REMARQUE.— On peut vérifier expérimentalement ce calcul avec la fonction suivante, qui retourne une variable de Bernoulli égale à 1 si, et seulement si, l'une des 25 premières valeurs est égale à 10, c'est-à-dire $\mathbb{1}_{(V_{25}=10)}$.

```
def succes():
  X = simul_X(10, 25)
  return (10 in X)
```

On exécute un grand nombre de fois la fonction `succes()` pour constituer une réalisation d'un échantillon i.i.d. D'après la Loi des grands nombres, la proportion de 1 parmi les valeurs prises est une estimation assez fiable de la probabilité $\mathbf{P}(V_{25} = 10)$.

```
Nb_iter, prop = 10000, 0
for i in range(Nb_iter):
    prop += succes()
prop /= Nb_iter
```

L'exécution du code précédent donne bien une proportion proche de 93%.

**7. c.** Par **2.** et **7.a.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(U_k) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(U_k \geqslant i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-i+1)^k}{N^k}\\ &= \frac{1}{N^k}S_k(N).\end{aligned}$$

Par **1.**,
$$\mathbf{E}(U_k) \sim \frac{N}{k+1}$$
lorsque N tend vers $+\infty$.

**8.** En tant que composées d'une variable aléatoire discrète par une fonction à valeurs dans $W$, $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $W$.

❧ Pour tout $w \in W$, on note $V_w$, l'image réciproque de $\{w\}$ par l'application $\Phi$ :
$$V_w = \Phi^*(\{w\}).$$
Alors
$$\big[\Phi(Z) = w\big] = [Z \in V_w] \quad \text{et} \quad \big[\Phi(T) = w\big] = [T \in V_w].$$
Comme Z et T sont des variables aléatoires discrètes *de même loi* à valeurs dans V et que $V_w \in \mathfrak{P}(V)$, les événements $[Z \in V_w]$ et $[T \in V_w]$ sont équiprobables :
$$\mathbf{P}(Z \in V_w) = \mathbf{P}(T \in V_w)$$
et donc
$$\forall\, w \in W, \quad \mathbf{P}\big(\Phi(Z) = w\big) = \mathbf{P}\big(\Phi(T) = w\big),$$
ce qui prouve que les variables aléatoires discrètes $\Phi(Z)$ et $\Phi(T)$ ont même loi.

❧ En particulier, ces variables ont même espérance (si elles sont d'espérance finie) et même variance (si elles admettent un moment d'ordre deux).

**9. a.** Il est clair que
$$f = [x \mapsto N + 1 - x]$$
est une application de E dans E. Comme les $X_i$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans E, alors les $Y_i = f(X_i)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes à valeurs dans E.

En tant que variables aléatoires aléatoires bornées, elles sont d'espérance finie et admettent un moment d'ordre deux.

❧ Par linéarité de l'espérance et **5.**,
$$\mathbf{E}(Y_i) = (N+1) - \mathbf{E}(X_i) = \frac{N+1}{2}.$$
❧ On sait que $\mathbf{V}(aX_i + b) = a^2\,\mathbf{V}(X_i)$, donc **[5.]**
$$\mathbf{V}(Y_i) = V(X_i) = \frac{N^2-1}{12}.$$

**9. b.** Comme le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est, par hypothèse, une famille de variables aléatoires indépendantes, alors le vecteur
$$(Y_1, \dots, Y_n) = \big(f(X_1), \dots, f(X_n)\big)$$
est aussi une famille de variables aléatoires indépendantes (lemme des coalitions).

❧ Comme $Z = X_1$ et $T = X_i$ suivent la même loi, les variables $Y_1 = f(Z)$ et $Y_i = f(T)$ suivent aussi la même loi par **8.** Plus précisément,
$$Y_k(\omega) = i \iff X_k(\omega) = (N+1) - i$$
donc
$$\mathbf{P}(Y_k = i) = \mathbf{P}\big(X_k = (N+1) - i\big) = \frac{1}{N}$$
ce qui signifie que les variables aléatoires $Y_k$ suivent toutes la loi uniforme sur E.

**9. c.** On vient en fait de démontrer que les vecteurs aléatoires
$$Z = (X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \quad \text{et} \quad T = (Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$
ont même loi en tant que variables aléatoires à valeurs dans $E^n$. Considérons la fonction $\Phi : E^n \to E$ définie par
$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (N+1) - \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$
D'après **8.**, les variables aléatoires
$$\Phi(T) = (N+1) - \min\{Y_1, \dots, Y_n\} \quad \text{et} \quad \Phi(Z) = (N+1) - U_k$$
suivent la même loi. Or
$$\begin{aligned} V_k &= \max\{X_1, \dots, X_n\} \\ &= \max\big\{(N+1) - Y_1, \dots, (N+1) - Y_n\big\} \\ &= (N+1) - \min\{Y_1, \dots, Y_n\} \end{aligned}$$
donc $V_k$ a même loi que $(N+1) - U_k$ et, comme au **9.a.**,
$$\mathbf{E}(V_k) = (N+1) - \mathbf{E}(U_k), \qquad \mathbf{V}(V_k) = \mathbf{V}(U_k).$$

REMARQUE.— D'après **7.c.**,
$$\mathbf{E}(V_k) \sim \frac{k}{k+1} \cdot N$$
lorsque N tend vers $+\infty$.

**10. a.** Étant donnés *deux* entiers $x_1$ et $x_2$, le maximum de ces nombres est l'un d'eux et le minimum est l'autre ! Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$,

– ou bien $U_2(\omega) = X_1(\omega)$ et $V_2(\omega) = X_2(\omega)$
– ou bien $U_2(\omega) = X_2(\omega)$ et $V_2(\omega) = X_1(\omega)$

Par conséquent,
$$\begin{aligned} &U_2(\omega) + V_2(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) \\ \text{et}\quad &U_2(\omega)V_2(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) \end{aligned}$$
pour tout $\omega \in \Omega$.

**10. b.** Comme les variables $X_1$ et $X_2$ sont (par hypothèse de départ) indépendantes et de même loi,
$$\begin{aligned} \mathbf{V}(U_2 + V_2) &= \mathbf{V}(X_1 + X_2) \\ &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) && \text{(indépendance)} \\ &= 2\,\mathbf{V}(X_1) && \text{(même loi)} \\ &= \frac{N^2-1}{6} \end{aligned}$$
d'après **5.**. De manière analogue,
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(U_2V_2) = \mathbf{E}(X_1X_2) &= \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2) && \text{(indépendance)} \\ &= [\mathbf{E}(X_1)]^2 && \text{(même loi)} \\ &= \Big(\frac{N+1}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

❧ La covariance se déduit alors de la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \mathbf{E}(U_2V_2) - \mathbf{E}(U_2)\,\mathbf{E}(V_2)$$

puisque les deux dernières espérances du second membre ont déjà été calculées (**7.c.**, **9.c.**) : le calcul ne présente pas de réelle difficulté.

**10. c.** Par **9.c.** et **10.b.**,

$$\mathbf{V}(U_2) = \mathbf{V}(V_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(U_2 + V_2) = \frac{N^2 - 1}{6}.$$

Or

$$\mathbf{V}(U_2 + V_2) = \mathbf{V}(U_2) + \mathbf{V}(V_2) + 2\,\mathbf{Cov}(U_2, V_2)$$

donc

$$\mathbf{V}(U_2) = \frac{1}{2}\mathbf{V}(U_2 + V_2) - \mathbf{Cov}(U_2, V_2)$$

et finalement

$$\mathbf{V}(U_2) = \mathbf{V}(V_2) = \frac{(N^2 - 1)(2N^2 + 1)}{36N^2}.$$

**10. d.** Par **9.c.** et la question précédente,

$$\rho_2(N) = \frac{\mathbf{Cov}(U_2, V_2)}{\mathbf{V}(U_2)} = \frac{N^2 - 1}{2N^2 + 1}$$

donc $\rho_2(N)$ tend vers $1/2$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

**11. a.** Commençons par remarquer que

$$\sum_{i=1}^{j}(2i - 1) = 2S_1(j) - S_0(j) = j^2$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. On peut alors déduire de **2.** que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X \geqslant i) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X = j) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X = j)\mathbb{1}_{(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N)} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j}(2i-1)\,\mathbf{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{N} j^2\,\mathbf{P}(X = j)
\end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de transfert (cas d'une variable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs)

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\,\mathbf{P}(X \geqslant i).$$

**11. b.** On applique la relation précédente avec le **7.a.** :

$$\mathbf{E}(U_k^2) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\frac{(N-i+1)^k}{N^k}.$$

Avec le changement d'indice $i \leftarrow (N - i + 1)$ :

$$\mathbf{E}(U_k^2) = \sum_{i=1}^{N}[2(N-i+1)-1]\frac{i^k}{N^k}$$

et finalement

$$\mathbf{E}(U_k^2) = \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k}.$$

**11. c.** Par Koenig-Huyghens, **11.b.** et **7.c.**,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(U_k) &= \mathbf{E}(U_k^2) - [\mathbf{E}(U_k)]^2 \\
&= \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k} - \frac{[S_k(N)]^2}{N^{2k}}.
\end{aligned}$$

(J'imagine mal une simplification de cette expression !)

**11. d.** L'entier $k$ est fixé, on fait tendre $N$ vers $+\infty$ : on peut donc appliquer l'équivalent calculé au **1.**, sous la forme de développements asymptotiques afin de pouvoir les combiner linéairement (on n'ajoute pas des équivalents sans précaution).

$$\begin{aligned}
\frac{(2N+1)S_k(N)}{N^k} &= \frac{2N^2}{k+1} + o(N^2) \\
\frac{2S_{k+1}(N)}{N^k} &= \frac{2N^2}{k+2} + o(N^2) \\
\frac{[S_k(N)]^2}{N^{2k}} &= \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2)
\end{aligned}$$

On déduit de la formule établie à la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(U_k) &= \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} \cdot N^2 + o(N^2) \\
&\sim \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} \cdot N^2
\end{aligned}$$

lorsque $N$ tend vers $+\infty$.