Une variable aléatoire X dont la loi est caractérisée par

$$\mathbf{P}(X=-1)=\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(X=1)={}^{1}\!/_{3}$$

et la variable aléatoire définie par $Y=X^2$ ne sont pas corrélées.

Les variables aléatoires X et Y sont bornées (elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs), donc elles admettent toutes deux un moment d'ordre 2 et leur covariance est bien définie.

❧ Par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X)=-\mathbf{P}(X=-1)+\mathbf{P}(X=1)=0.$$

Comme les valeurs prises par X sont ± 1 et 0, alors les deux variables aléatoires X et X^3 sont égales, donc $\mathbf{E}(X^3)=0$.

✍ *Les variables aléatoires X et X^3 ne sont pas seulement égales en loi, elles sont aussi égales en tant qu'applications de Ω dans $\mathbb{R}$:*

$$\forall\,\omega\in\Omega,\qquad \big[X(\omega)\big]^3=X(\omega).$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{Cov}(X,X^2)=\mathbf{E}(X^3)-\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(X^2)=0$$

donc X et X^2 sont décorrélées (alors que X^2 est une fonction de X !).