Si la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

On sait que $\mathbf{E}(S_n) = np$ et que $\mathbf{V}(S_n) = npq$ (avec $q = 1 - p$ comme d'habitude).

D'autre part, comme

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon \iff \big|S_n(\omega) - np\big| \geqslant n\varepsilon,$$

on déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \mathbf{P}\big(\big|S_n - \mathbf{E}(S_n)\big| \geqslant n\varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Comme $0 < p < 1$, alors $0 < pq \leqslant 1/4$ et donc

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

✍ *Le graphe de $[x \mapsto x(1-x)]$ est une parabole qui coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et en $x = 1$, donc son sommet est situé en $x = 1/2$ (au <u>milieu</u> des deux racines), ce qui donne le maximum de $x(1-x)$.*