Des personnes se transmettent une information : ou bien l'information est transmise fidèlement (avec probabilité p), ou bien elle est transformée en son contraire (avec probabilité $(1-p)$). On note p_n, la probabilité pour que la n-ième personne reçoive l'information correcte.

1.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$$

2.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1+(2p-1)^n}{2}$$

3. *La limite de p_n est indépendante de $0 < p < 1$.*

1. **Modélisation —**
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements tels que

$$\mathbf{P}(A_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k^c) = p.$$

Nous allons maintenant étudier la suite de terme général $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

✍ *On interprète l'évènement A_k comme le fait que l'information reçue par la k-ième personne soit correcte. On considère que l'émetteur dispose de l'information correcte en supposant que $\mathbf{P}(A_0) = 1$.*

L'énoncé impose une condition sur la transmission *de l'information : une transmission fidèle conserve aussi bien l'information correcte, que l'information incorrecte. C'est pourquoi on a imposé la même valeur aux deux probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k)$ et $\mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k^c)$.*

Par passage au complémentaire, on déduit de ces hypothèses que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(A_{k+1}^c \mid A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1} \mid A_k^c) = 1-p.$$

Il ne s'agit pas d'une hypothèse supplémentaire, *mais d'une conséquence rigoureusement déduite de notre modèle au moyen d'une règle de calcul vue en cours.*

Pour justifier que notre modèle a bien un sens (et en particulier qu'il est cohérent), il faudrait appliquer un théorème dû à Kolmogorov.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (A_n, A_n^c) est un système complet d'évènements, on déduit de la formule des probabilités totales que

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n^c)\,\mathbf{P}(A_n^c)$$

c'est-à-dire

$$p_{n+1} = p \cdot p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p).$$

2. On a démontré que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était une suite arithmético-géométrique.

✍ *On doit connaître la méthode pour exprimer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.*

L'unique solution de l'équation $\ell = (2p-1)\ell + (1-p)$ est $\ell = 1/2$.

Par conséquent, la suite de terme général $p_n - 1/2$ est une suite géométrique, de raison $(2p-1)$ et de terme initial $1/2$. Donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n - 1/2 = (2p-1)^n \cdot 1/2.$$

3. Pour $0 < p < 1$, la raison $2p-1$ appartient à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$, donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/2$ (le point fixe).