Une particule émise par un matériau radioactif atteint une cible donnée avec une probabilité $p = 1\%$.
On modélise ce phénomène aléatoire par une famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *d'évènements indépendants tels que*

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \mathbf{P}(A_n) = p.$$

1. *On attend que* n *particules soient émises. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une d'elles atteignent la cible ?*
2. *Pour quelle valeur de* $N \in \mathbb{N}$ *la probabilité qu'au moins l'une des* N *premières particules émises atteigne la cible est-elle supérieure à 80% ?*

1. Posons, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c \subset \Omega.$$

Par hypothèse, les A_k sont des évènements (autrement dit : $A_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), donc l'ensemble B_n appartient à la tribu $\mathcal{A}$ (stabilité de la tribu par intersection finie ou dénombrable). L'évènement B_n signifie qu'*aucune* des n premières particules n'a atteint sa cible.

Il s'agit ici de calculer la probabilité de

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k = B_n^c \in \mathcal{A}.$$

Comme les évènements A_k sont indépendants, les évènements A_k^c sont indépendants eux aussi, donc

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k^c) = \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbf{P}(A_k)\big) = (1-p)^n.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(B_n^c) = 1 - \mathbf{P}(B_n) = 1 - (1-p)^n.$$

✍ *On peut aussi modéliser cette expérience aléatoire par la donnée d'une suite* $(X_k)_{k\geqslant 1}$ *de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli* $\mathscr{B}(p)$.

En posant

$$\forall\, k \in\in \mathbb{N}^*, \qquad A_k = [X_k = 1],$$

on constate que ces deux modèles sont équivalents.

*On peut alors définir une nouvelle variable aléatoire discrète : l'**instant*** T ***du premier succès*** *en posant*

$$T(\omega) = \min\big\{k \in \mathbb{N}^* \ :\ X_k(\omega) = 1\big\}$$

et en convenant que $T(\omega) = +\infty$ *lorsque l'ensemble est vide. Le cours montre que* T *est bien une variable aléatoire discrète qui est presque sûrement à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *(c'est-à-dire* $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$*). Conditionnellement à l'évènement* $[T \in \mathbb{N}^*]$*, la loi de* T *est la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$ *:*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(T = k \mid T \in \mathbb{N}^*) = p(1-q)^{k-1}.$$

L'évènement étudié dans cette première question est $[T \leqslant n]$.

2. On cherche un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(B_N^c) \geqslant 0,8$, c'est-à-dire $(1-p)^N \leqslant 0,2$. Il suffit pour cela que

$$N \geqslant \frac{\ell n(0,2)}{\ell n(1-p)}.$$

✍ *Attention, comme* $0 < p < 1$*, on divise par un réel strictement* négatif *— ce qui nous donne, comme on pouvait s'y attendre, une minoration de* N *(et pas une majoration !).*