> *Dans une usine, les machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20%, 30% et 50% de la production de ziglotrons à coulisse. Les taux de ziglotrons non conformes produits par ces machines sont respectivement 1%, 2% et 3%.*
>
> **1.** *Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle défectueux.*
>
> **1. a.** *Il y a environ 1 chance sur 4 pour qu'il ait été produit par la machine M_2.*
>
> **1. b.** *Pour quelles valeurs de $1 \leqslant k \leqslant 3$ la probabilité* a posteriori $\mathbf{P}(M_k \mid D)$ *pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k est-elle plus grande que la probabilité* a priori $\mathbf{P}(M_k)$ *pour que le ziglotron ait été produit par la machine M_k ?*
>
> **2.** *Un ziglotron prélevé dans l'ensemble de la production se révèle conforme. Il y a environ 3 chances sur 10 pour qu'il ait été construit par la machine M_2. Expliquer.*

1. a. **Modélisation —**
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un système complet d'évènements (M_1, M_2, M_3) et un évènement D. On suppose que

$$\mathbf{P}(M_1) = \frac{2}{10}, \quad \mathbf{P}(M_2) = \frac{3}{10}, \quad \mathbf{P}(M_3) = \frac{5}{10}$$

et que

$$\mathbf{P}(D \mid M_1) = \frac{1}{100}, \quad \mathbf{P}(D \mid M_2) = \frac{2}{100}, \quad \mathbf{P}(D \mid M_3) = \frac{3}{100}.$$

✍ *Une fois encore, on s'appuie sur l'hypothèse d'équiprobabilité : les probabilités (et, le cas échéant, les probabilités conditionnelles) sont choisies égales aux proportions constatées dans la réalité.*

On prend soin de vérifier que $2/10 + 3/10 + 5/10 = 1$ (c'est la moindre des choses pour un système complet d'évènements !), mais à part ça, on admet que le modèle ainsi défini est cohérent.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(D) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(D \mid M_k)\,\mathbf{P}(M_k) = \frac{2+6+15}{1000} = \frac{23}{1000}.$$

Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(M_2 \mid D) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{\mathbf{P}(D \mid M_2)\,\mathbf{P}(M_2)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{6}{23} \approx \frac{1}{4}.$$

1. b. On trouve de même que

$$\mathbf{P}(M_1 \mid D) = 2/23 \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(M_3 \mid D) = 15/23$$

et on constate que la somme de ces trois probabilités conditionnelles est égale à 1 — ce qui, à nouveau, est la moindre des choses pour un système complet d'évènements.

✍ *En effet, quel que soit le système complet d'évènements $(A_k)_{0 \leqslant k < N}$, comme*

$$\bigsqcup_{0 \leqslant k < N} A_k = \Omega,$$

alors, pour toute *mesure de probabilité $\mathbf{P}$,*

$$\sum_{0 \leqslant k < N} \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

et donc, pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\sum_{0 \leqslant k < N} \mathbf{P}(A_k \mid B) = \sum_{0 \leqslant k < N} \mathbf{P}_B(A_k) = \mathbf{P}_B(\Omega) = 1.$$

Bien entendu, cette propriété s'étend aux systèmes complets d'évènements dénombrables (puisque toute mesure de probabilité est non seulement additive, mais aussi σ-additive).

On a donc

$$\mathbf{P}(M_1 \mid D) < \mathbf{P}(M_1), \quad \mathbf{P}(M_2 \mid D) < \mathbf{P}(M_2), \quad \mathbf{P}(M_3 \mid D) > \mathbf{P}(M_3).$$

2. Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(M_2 \mid D^c) = \frac{\mathbf{P}(M_2 \cap D^c)}{\mathbf{P}(D^c)} = \frac{\mathbf{P}(D^c \mid M_2)\,\mathbf{P}(M_2)}{\mathbf{P}(D^c)} = \frac{98 \cdot 3}{977} \approx \frac{3}{100}.$$

✍ *Une fois encore, on a appliqué la règle de calcul relative au passage au complémentaire :*

$$\mathbf{P}(D^c \mid M_2) = \mathbf{P}_{M_2}(D^c) = 1 - \mathbf{P}_{M_2}(D^c) = 1 - \mathbf{P}(D^c \mid M_2)$$

qui vaut pour toutes les mesures de probabilité (pour $\mathbf{P}$ *<u>et</u> pour* $\mathbf{P}_{M_2}$*).*