Un électeur indécis vote tantôt à gauche, tantôt à droite. Pour chaque scrutin, la probabilité pour qu'il vote comme au scrutin précédent est égale à $2/3$.

1. *Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant à Pile ou Face. Quelle est la probabilité pour qu'il vote à gauche lors des deux premiers scrutins et à droite lors des deux scrutins suivants ?*

2. *Au premier scrutin, il effectue son choix en tirant dans une urne qui contient une boule rouge (pour voter à gauche) et trois boules bleues (pour voter à droite). Quelle est la probabilité pour qu'il vote à droite au deuxième scrutin ?*

1. **Modélisation —**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, en admettant qu'il existe quatre évènements V_1, V_2, V_3 et V_4 tels que

$$\mathbf{P}(V_1) = 1/2 \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k < 4, \quad \mathbf{P}(V_{k+1} \mid V_k) = \mathbf{P}(V_{k+1}^c \mid V_k^c) = 2/3.$$

✍ *L'évènement V_k indique le vote de l'indécis lors du k-ième scrutin. On peut supposer (par exemple) que l'évènement V_k est réalisé lorsque l'électeur vote "à gauche". Dans ce cas, l'évènement V_k^c est réalisé lorsque l'électeur vote "à droite".*

Dans ce premier modèle, le premier vote est déterminé par le lancer d'une pièce. Sans information supplémentaire, on choisit de faire l'hypothèse d'équiprobabilité et on considère donc que $\mathbf{P}(V_1) = 1/2$.

Ensuite, on traduit au mieux l'indication de l'énoncé en fixant la valeur des probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(V_{k+1} \mid V_k)$ et $\mathbf{P}(V_{k+1}^c \mid V_k^c)$ qui traduisent le fait de voter au $(k+1)$-ième scrutin "comme au k-ième scrutin".

Nous admettons *que ce modèle est **cohérent** et nous allons bientôt nous rendre compte qu'il est **incomplet**.*

Il s'agit de calculer la probabilité de l'évènement $V_1 \cap V_2 \cap V_3^c \cap V_4^c$, il faut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(V_1 V_2 V_3^c V_4^c) = \mathbf{P}(V_1)\,\mathbf{P}(V_2 \mid V_1)\,\mathbf{P}(V_3^c \mid V_1 V_2)\,\mathbf{P}(V_4^c \mid V_1 V_2 V_3^c).$$

✍ *Le modèle que nous avons défini nous donne les valeurs des deux premiers facteurs mais pas celles des deux derniers. Il faut donc le compléter pour pouvoir terminer ce calcul.*

*Lorsqu'un processus aléatoire $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas constitué d'une succession d'évènements indépendants (ce qui est ici le cas), on recourt souvent à une hypothèse simplificatrice : l'**hypothèse de Markov**.*

Nous allons donc supposer que

$$\mathbf{P}(V_3^c \mid V_1 V_2) = \mathbf{P}(V_3^c \mid V_2) \quad \textit{et que} \quad \mathbf{P}(V_4^c \mid V_1 V_2 V_3^c) = \mathbf{P}(V_4^c \mid V_3^c).$$

Il est important de bien comprendre que ces deux égalités ne peuvent pas se déduire du modèle probabiliste initial au moyen des règles de calcul vues en cours — ce sont bien des hypothèses supplémentaires que nous ajoutons au modèle.

*Et nous admettrons une fois de plus que les propriétés que nous tirons de l'hypothèse de Markov n'introduisent pas de contradiction dans notre modèle probabiliste (qui reste donc **cohérent** en devenant **complet**).*

On déduit de l'hypothèse de Markov que

$$\mathbf{P}(V_1 V_2 V_3^c V_4^c) = \mathbf{P}(V_1)\,\mathbf{P}(V_2 \mid V_1)\big(1 - \mathbf{P}(V_3 \mid V_2)\big)\,\mathbf{P}(V_4^c \mid V_3^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

2. Puisque la situation a changé (ne serait-ce que l'étape initiale du processus aléatoire), il faut changer de modèle.

✍ *Pour changer de modèle probabiliste, il y a deux possibilités :*

- *conserver les notations utilisées pour représenter les évènements étudiés et changer de mesure de probabilité (= remplacer la mesure initiale $\mathbf{P}$ par une nouvelle mesure $\mathbf{P}_0$)*
- *ou conserver l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et changer de notations pour les évènements.*

La théorie de Kolmogorov nous indique que l'espace probabilisé abstrait $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est assez vaste pour que tout modèle "raisonnable" (= pas immédiatement contradictoire) soit cohérent.

Nouvelle modélisation —
On admet qu'il existe deux évènements R_1 et R_2 dans $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbf{P}(R_1) = 1/4 \quad \text{et que} \quad \mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = 2/3.$$

✍ *On note cette fois R_k, l'évènement qui traduit le fait de voter "à gauche" lors du k-ième scrutin.*
L'hypothèse d'équiprobabilité nous a conduit à poser $\mathbf{P}(R_1) = 1/4$ (= la proportion de boules rouges dans l'urne).
Nous admettons une fois de plus que ce modèle est cohérent.

Nous cherchons à calculer $\mathbf{P}(R_2^c)$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements (R_1, R_1^c) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R_2^c) &= \mathbf{P}(R_1)\,\mathbf{P}(R_2^c \mid R_1) + \mathbf{P}(R_1^c)\,\mathbf{P}(R_2^c \mid R_1^c) \\
&= \mathbf{P}(R_1)\big(1 - \mathbf{P}(R_2 \mid R_1)\big) + \big(1 - \mathbf{P}(R_1)\big)\,\mathbf{P}(R_2^c \mid R_1^c) \\
&= 1/4 \cdot 1/3 + 3/4 \cdot 2/3 = 7/12.
\end{aligned}$$

✍ *La règle de calcul $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ vaut pour* toutes *les mesures de probabilité, donc aussi pour la mesure $\mathbf{P}_{R_1}$. Pour cette raison, on a*

$$\mathbf{P}(R_2^c \mid R_1) = \mathbf{P}_{R_1}(R_2^c) = 1 - \mathbf{P}_{R_1}(R_2).$$