> *Une boîte contient neuf pièces : deux pièces normales, trois pièces truquées avec deux côtés Face et quatre pièces truquées avec deux côtés Pile.*
> *Si on tire une pièce au hasard et qu'on la lance (sans l'examiner), on obtient Face avec probabilité $4/9$.*

Modélisation —

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On admet qu'il existe quatre évènements P, N, T_f et T_p dans $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathbf{P}(N) = 2/9, \quad \mathbf{P}(T_f) = 3/9, \quad \mathbf{P}(T_p) = 4/9$$

et tels que

$$\mathbf{P}(F \mid N) = 1/2, \quad \mathbf{P}(F \mid T_f) = 1, \quad \mathbf{P}(F \mid T_p) = 0.$$

✍ *Les probabilités des évènements N, T_f et T_p ont été* choisies *égales aux proportions de pièces Normales, de pièces avec deux côtés Face et de pièces avec deux côtés Pile dans la boîte. (Appelons cela l'hypothèse d'équiprobabilité lors du choix, aléatoire !, de la pièce.)*

On doit remarquer que ces trois évènements forment un système complet et que les valeurs choisies pour les probabilités sont cohérentes avec la propriété habituelle des système complet d'évènements :

$$\mathbf{P}(N) + \mathbf{P}(T_f) + \mathbf{P}(T_p) = 1.$$

Si les valeurs de $\mathbf{P}(F \mid T_f)$ et $\mathbf{P}(F \mid T_p)$ sont imposées par le bon sens, on fait une nouvelle fois l'hypothèse d'équiprobabilité pour poser $\mathbf{P}(F \mid N) = 1/2$.

Comme d'habitude, on ne prend pas la peine de vérifier que ce modèle est cohérent. (On a quand même pris soin de vérifier la propriété des systèmes complets d'évènements !)

On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements (N, T_f, T_p). D'après le modèle que nous avons choisi,

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(F \mid N)\,\mathbf{P}(N) + \mathbf{P}(F \mid T_f)\,\mathbf{P}(T_f) + \mathbf{P}(F \mid T_p)\,\mathbf{P}(T_p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

✍ *Il faut garder présent à l'esprit qu'on n'a pas calculé la probabilité $\mathbf{P}(F)$! Nous avons en fait calculé cette probabilité* dans le cadre d'un modèle que nous avons choisi.