> *Quand un tricheur tire une carte dans un jeu de 52 cartes, il est sûr de retourner un as.*
> **1.** *La probabilité pour qu'un individu retourne un as en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes est égale à $(1+12p)/13$, où p est la proportion de tricheurs dans la population.*
> **2.** *Sachant qu'un individu a retourné un as, la probabilité pour qu'il soit un tricheur est égale à $13p/(12p+1)$.*

1. Il faut d'abord définir un modèle probabiliste. Pour cela, nous *admettons* qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui contient deux évènements A et T tels que

$$\mathbf{P}(T) = p, \quad \mathbf{P}(A \mid T) = 1, \quad \mathbf{P}(A \mid T^c) = {}^1\!/_{13}.$$

✍ *L'évènement T signifie qu'on a affaire à un tricheur et l'évènement A que la personne choisie tire un as.*

*On a **implicitement** fait l'hypothèse que la probabilité de l'évènement T était égale à la proportion p de tricheurs dans la population et que la probabilité pour qu'une personne honnête tire un as soit égale à la proportion d'as dans un paquet de cartes (soit 1 sur 13, puisqu'il s'agit d'un jeu de 52 cartes).*

Je rappelle que rien ne peut justifier cette hypothèse d'équiprobabilité en dehors de l'absence d'information précise (et de la nécessité de rendre les calculs aussi simples que possible).

En revanche, la valeur de $\mathbf{P}(A \mid T)$ traduit une information (explicitement) donnée par l'énoncé.

*Comme d'habitude, on admet que ce modèle probabiliste est **cohérent** et on pourra constater à la fin de l'exercice qu'il est **complet** (nous n'aurons pas besoin de poser d'hypothèse supplémentaire).*

D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'évènements (T, T^c),

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid T)\,\mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(A \mid T^c)\,\mathbf{P}(T^c) = 1 \cdot p + \frac{1}{13} \cdot (1-p) = \frac{1+12p}{13}.$$

✍ *Comme $0 < p < 1$, la valeur de $\mathbf{P}(A)$ est comprise entre ${}^1\!/_{13}$ (cas où il n'y aurait aucun tricheur) et 1 (cas où tous les individus seraient des tricheurs).*

Il faut penser à faire ce genre de vérifications aussi souvent que possible afin de s'assurer qu'on n'aboutit pas à un résultat absurde.

2. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(T \mid A) = \frac{\mathbf{P}(T \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \mid T)\,\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{1 \cdot p \cdot 13}{12p+1} = \frac{13p}{12p+1}.$$

✍ *S'il n'y a pas de tricheur dans la population ($p = 0$), cette probabilité est nulle.*
Si tous les individus sont des tricheurs ($p = 1$), cette probabilité est égale à 1.
Tout est normal !