*Soient A, B et C, trois évènements indépendants avec* $\mathbf{P}(A) = 1/4$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$ *et* $\mathbf{P}(C) = 1/2$.

**1.** *La probabilité pour qu'aucun de ces évènements ne soit réalisé est égale à* $1/4$.

**2.** *La probabilité pour qu'un seul de ces évènements soit réalisé est égale à* $11/24$.

**1.**

✍ *Le modèle est donné par l'énoncé, il suffit donc d'appliquer les règles de calcul vues en cours.*

*Mais il faut aussi faire confiance : on* ***admet*** *que le modèle proposé est* ***cohérent****! Pour vérifier cela, il faudrait étudier la sous-tribu de* $\mathcal{A}$ *engendrée par les trois évènements A, B et C et vérifier qu'il existe une, et une seule, mesure de probabilité définie sur les* $2^3$ *atomes de cette sous-tribu qui soit compatible avec les hypothèses faites dans l'énoncé...*

On cherche ici à calculer $\mathbf{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)$. Comme les évènements $(A, B, C)$ sont indépendants, on sait (ou on admet) que les évènements contraires $(A^c, B^c, C^c)$ sont indépendants. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = \mathbf{P}(A^c)\,\mathbf{P}(B^c)\,\mathbf{P}(C^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

**2.** Posons

$$D_1 = (A \cap B^c \cap C^c), \quad D_2 = (A^c \cap B \cap C^c), \quad D_3 = (A^c \cap B^c \cap C).$$

On cherche ici à calculer la probabilité de

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

❧ Comme A, B et C appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ et qu'une tribu est stable par passage au complémentaire, par union (finie ou dénombrable) et par intersection (finie ou dénombrable), les ensembles $D_1$, $D_2$, $D_3$ et D appartiennent aussi à la tribu $\mathcal{A}$, donc la probabilité $\mathbf{P}(D)$ est bien définie.

❧ Les trois évènements $D_1$, $D_2$ et $D_3$ sont deux à deux disjoints, car
- $D_1 \subset A$ et $D_2 \subset A^c$, donc $D_1 \cap D_2 \subset A \cap A^c = \varnothing$ ;
- $D_1 \subset C^c$ et $D_3 \subset C$, donc $D_1 \cap D_3 \subset C \cap C^c = \varnothing$ ;
- $D_2 \subset B$ et $D_3 \subset B^c$, donc $D_2 \cap D_3 \subset B \cap B^c = \varnothing$.

Par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(D_1) + \mathbf{P}(D_2) + \mathbf{P}(D_3).$$

Comme les évènements A, B et C sont supposés indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_1) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B^c)\,\mathbf{P}(C^c) = 1/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 2/24,\\
\mathbf{P}(D_2) &= \mathbf{P}(A^c)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C^c) = 3/4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1/2 = 3/24,\\
\mathbf{P}(D_3) &= \mathbf{P}(A^c)\,\mathbf{P}(B^c)\,\mathbf{P}(C) = 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 6/24,
\end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(D) = (2+3+6)/24 = 11/24$.