> *Deux usines produisent des flaveurmètres bilobés. La première produit deux fois plus de flaveurmètres bilobés que l'usine 2. On estime à 20% (resp. à 5%) la proportion de flaveurmètres bilobés défectueux produits par l'usine 1 (resp. par l'usine 2).*
> **1.** *La proportion de flaveurmètres produits par l'usine 1 est égale à $2/3$.*
> **2.** *La proportion de flaveurmètres non défectueux est égale à $17/20$.*
> **3.** *Si un flaveurmètre tiré au hasard de la production est défectueux, la probabilité pour que ce flaveurmètre ait été produit par l'usine 1 est égale à $8/9$.*

1. Commençons par modéliser la situation. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dans lequel deux évènements A et B vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathbf{P}(A) = 2\,\mathbf{P}(A^c), \qquad \mathbf{P}(B \mid A) = 1/5, \qquad \mathbf{P}(B \mid A^c) = \frac{1}{20}.$$

✍ *Il faut comprendre que l'évènement A signifie que le flaveurmètre a été produit dans l'usine 1 et que l'évènement B signifie que le flaveurmètre est défectueux.*

❧ *Il n'est pas utile d'invoquer l'hypothèse d'équiprobabilité, la seule chose qui compte est de définir ces trois probabilités pour pouvoir en déduire toutes les probabilités qui nous intéressent ensuite.*

❧ *On verra à la fin de l'exercice que ce modèle est **complet** : on aura réussi à déduire toutes les probabilités qui nous intéressent de ces hypothèses et des règles de calcul vues en cours.*

❧ *On admettra en revanche que ce modèle est **cohérent** (= exempt de contradiction). Il faudrait pour cela considérer la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les deux évènements A et B et vérifier que les hypothèses que nous venons de faire permettent de définir une, et une seule, mesure de probabilité discrète sur cette sous-tribu. C'est long et fastidieux...*

❧ On peut répondre à la première question : on a supposé que $\mathbf{P}(A) = 2\,\mathbf{P}(A^c)$ et on sait que $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$, donc $\mathbf{P}(A) = 2/3$.

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c) = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8+1}{60} = \frac{3}{20}$$

et par conséquent

$$\mathbf{P}(B^c) = 1 - \mathbf{P}(B) = \frac{17}{20}.$$

3. Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{(1/5)(2/3)}{(3/20)} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}.$$