

On dispose de deux urnes : l'urne 1 contient deux boules blanches et trois bleues ; l'urne 2 contient trois boules blanches et quatre bleues. On tire une boule dans l'urne 1 et on la place dans l'urne 2. On tire alors une boule dans l'urne 2.

1. La probabilité pour que la première boule tirée soit bleue est égale à $\frac{3}{5}$.
2. La probabilité pour que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à $\frac{23}{40}$.

1. On commence par **modéliser** la situation.

On considère un espace probabilisé (abstrait) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont la tribu $\mathcal{A}$ contient au moins deux événements B_1 et B_2 , étant entendu que l'événement B_i indique qu'une boule bleue est tirée lors du i -ème tirage.

Dans un premier temps, on s'intéresse seulement à l'événement B_1 .

Aucun théorème du cours de probabilités ne permet de calculer la probabilité de B_1 . Deux possibilités se présentent :

- ou bien on choisit *arbitrairement* une valeur pour $\mathbf{P}(B_1)$;
- ou bien on fait une hypothèse *arbitraire* pour compléter notre modèle et on peut alors déduire (en appliquant les règles du calcul des probabilités) la valeur de $\mathbf{P}(B_1)$ de cette hypothèse.

Dans le second cas, on a l'impression d'une réponse plus précise parce qu'on pose un calcul. Néanmoins, le résultat de ce calcul est quand même le reflet d'un choix arbitraire !

Prenons la seconde option pour avoir l'impression de faire quelque chose et **supposons** que la probabilité de tirer une boule d'une couleur donnée soit égale à la proportion de boules de cette couleur.

Il y a 5 boules en tout, dont 3 sont bleues. La **proportion** de boules bleues est donc égale à $\frac{3}{5}$ (c'est un *fait*) et $\mathbf{P}(B_1) = \frac{3}{5}$ (ce n'est pas un fait, c'est une conséquence de l'hypothèse que nous venons de faire).

2. Pour calculer la probabilité de $\mathbf{P}(B_2)$, nous allons utiliser la formule des probabilités totales au moyen du système complet d'événements (B_1, B_1^c) .

$$\mathbf{P}(B_2) = \mathbf{P}(B_2 | B_1) \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2 | B_1^c) \mathbf{P}(B_1^c)$$

D'après la question précédente,

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B_1^c) = 1 - \mathbf{P}(B_1) = \frac{2}{5}.$$

Une fois qu'on a défini $\mathbf{P}(B_1)$, nous pouvons calculer $\mathbf{P}(B_1^c)$ avec certitude : une des règles de calcul vues en cours nous permet de déduire la valeur de $\mathbf{P}(B_1^c)$ de la valeur de $\mathbf{P}(B_1)$ sans hypothèse supplémentaire.

Pour achever le calcul, il faut connaître les valeurs des deux probabilités conditionnelles. Nous n'avons aucun moyen mathématique de déduire ces deux probabilités des valeurs connues jusqu'ici, il faut donc **compléter** notre modèle probabiliste.

Pour cela, nous reprenons l'hypothèse d'équiprobabilité faite plus haut : la probabilité de tirer une boule bleue lors du second tirage sera, *par hypothèse*, égale à la proportion de boules bleues dans l'urne au moment d'effectuer le second tirage.

Si l'événement B_1 est réalisé, la deuxième urne contient 3 boules blanches et $4 + 1 = 5$ boules, donc nous conviendrons que

$$\mathbf{P}(B_2 | B_1) = \frac{5}{8}.$$

Si l'événement B_1^c est réalisé, la deuxième urne contient $4 = 3 + 1$ boules blanches et 4 boules bleues, donc nous conviendrons que

$$\mathbf{P}(B_2 | B_1^c) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

On peut alors (alors seulement !) appliquer la formule des probabilités totales et en déduire que, d'après le modèle que nous avons choisi,

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15 + 8}{40} = \frac{23}{40}.$$

En toute logique, nous devrions également prendre la peine de justifier que le modèle que nous avons choisi est cohérent (= exempt de contradiction). Pour cela, il faudrait étudier la tribu engendrée par les deux événements B_1 et B_2 : ce serait long et assez compliqué.