Espaces probabilisés discrets

Lemmes de Borel-Cantelli

❧ Comme les A_m sont des événements :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad A_m \in \mathscr{A}$$

et qu'une tribu, comme $\mathscr{A}$, est stable par union dénombrable,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \in \mathscr{A}.$$

En tant que tribu, $\mathscr{A}$ est aussi stable par intersection dénombrable, donc

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{A}$$

et par conséquent la probabilité $\mathbf{P}(B)$ est bien définie.

► **Premier lemme :** on suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_m)$ converge.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$B_{n+1} \subset A_n \cup B_{n+1} = B_n$$

donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbf{P}(B).$$

Par sous-additivité,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_m)$$

et comme la série $\sum \mathbf{P}(A_m)$ est convergente par hypothèse, le majorant est le reste d'une série convergente. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0.$$

Donc $\mathbf{P}(B) = 0$ et finalement $\mathbf{P}(B^c) = 1$.

❧ D'après les règles de calcul de l'algèbre booléenne,

$$B^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\right).$$

On déduit donc de ce qui précède que : presque sûrement, il existe un rang n à partir duquel tous les événements A_m^c sont réalisés, ce qui revient à dire qu'aucun événement A_m avec $m \geqslant n$ n'est réalisé.

► **Second lemme :** on suppose que les événements A_n sont indépendants et que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ diverge.

❧ Par convexité,

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \qquad 1 - u \leqslant \exp(-u)$$

et donc

$$\forall\, u \in [0, 1], \qquad 0 \leqslant 1 - u \leqslant \exp(-u).$$

On en déduit que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \prod_{m=n}^{N} \big[1 - \mathbf{P}(A_m)\big] \leqslant \exp\left[-\sum_{m=n}^{N} \mathbf{P}(A_m)\right].$$

Or $\sum \mathbf{P}(A_m)$ est une série *divergente* de terme général *positif*, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ et, par composition de limites et encadrement,

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{m=n}^{N} \mathbf{P}(A_m^c) = 0.$$

❧ Comme les événements A_m sont indépendants, alors les événements A_m^c sont indépendants $(\star)$ et par conséquent

$$\prod_{m=n}^{N} \mathbf{P}(A_m^c) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{N} A_m^c\Big).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements

$$C_N = \bigcap_{m=n}^{N} A_m^c$$

constituent une suite décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{N} A_m^c\Big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbf{P}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{N} A_m^c\Big).$$

Or, par double inclusion (classique),

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{N} A_m^c = \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m^c\Big) = 0.$$

REMARQUE.— La propriété $(\star)$ est tout, sauf évidente...

❧ Par passage au complémentaire, on en déduit que chaque événement

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

est presque sûr et donc que l'événement

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

en tant qu'intersection dénombrable d'événements presque sûrs, est lui aussi un événement presque sûr.

❧ Cette fois, presque sûrement, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que les événements A_n soient réalisés.