Espaces probabilisés discrets

❧ L'ensemble vide $\varnothing$ appartient à la tribu $\mathscr{E}$ et comme μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité

$$\mu_1(\varnothing) = 0 = \mu_2(\varnothing),$$

donc $\varnothing \in \mathscr{C}$.

❧ Si $A \in \mathscr{E}$, alors $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ par définition. Mais $A^c \in \mathscr{E}$ aussi et

$$\mu_1(A^c) = 1 - \mu_1(A) = 1 - \mu_2(A) = \mu_2(A^c),$$

donc $A^c \in \mathscr{C}$.

❧ Considérons enfin une suite croissante d'événements

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

appartenant à $\mathscr{C}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mu_1(A_n) = \mu_2(A_n).$$

Comme $\mathscr{E}$ est stable par union dénombrable (comme toute tribu doit l'être), on a donc

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$$

et par continuité croissante,

$$\mu_1\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu_2(A_n) = \mu_2\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big).$$

Par conséquent,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C}$$

et l'ensemble $\mathscr{C}$ est bien une "classe monotone".