Espaces probabilisés discrets

On considère un **ensemble fini ou dénombrable** E et une **loi de probabilité discrète** sur E, c'est-à-dire une famille sommable $(p_x)_{x\in E}$ de réels positifs dont la somme est égale à 1.

On note $\mathscr{E} = \mathfrak{P}(E)$, la tribu discrète sur E.

❧ Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable, donc il est légitime de poser

$$\forall\, A \in \mathscr{E}, \qquad \mu(A) = \sum_{x\in A} p_x.$$

Comme tous les p_x sont positifs, il est clair que

$$0 \leqslant \mu(A) \leqslant \sum_{x\in E} p_x = 1$$

donc μ, ainsi définie, est bien une application de $\mathscr{E}$ dans $[0,1]$.

❧ Par définition, $\mu(E) = 1$.

❧ Il reste à démontrer que μ est σ-additive.

Pour cela, on considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de la tribu $\mathscr{E}$ et on pose

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}.$$

La sous-famille $(p_x)_{x\in A}$ étant sommable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une partition de l'ensemble (fini ou dénombrable) A, on déduit du Théorème de Fubini que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(p_x)_{x\in A_n}$ est sommable ;
2. en posant
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad s_n = \sum_{x\in A_n} p_x,$$
on définit une série convergente $\sum s_n$
3. et la somme de cette série vérifie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{x\in A} p_x.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

et la σ-additivité de μ est ainsi démontrée.

► En conclusion, l'application

$$\mu \longmapsto (p_x)_{x\in E} = \big(\mu(\{x\})\big)_{x\in E}$$

définit une bijection entre les mesures de probabilité μ sur $(E, \mathscr{E})$ et les lois de probabilité discrètes $(p_x)_{x\in E}$.

Chaque mesure de probabilité discrète μ est ainsi caractérisée simplement par la famille $(p_x)_{x\in E}$, donc chaque variable aléatoire discrète X à valeurs dans E est caractérisée par la famille

$$\big(\mathbf{P}(X = x)\big)_{x\in E},$$

c'est-à-dire par les valeurs qu'elle prend (les $x \in E$) et les fréquences avec lesquelles ces valeurs apparaissent (les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$).