Variables aléatoires discrètes [106]

Soit X, une variable aléatoire discrète réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$: il s'agit d'une application

$$X : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$$

où l'ensemble E des valeurs prises par X est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$. Par *définition*,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad [X = x] \in \mathcal{A}.$$

[106.1] Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$X(\omega) \leqslant a \iff \exists\, x \in E \cap]-\infty, a]\,, \quad X(\omega) = x$$

donc

$$[X \leqslant a] = \bigsqcup_{\substack{x \in E \\ x \leqslant a}} [X = x] \in \mathcal{A}$$

en tant qu'union finie ou dénombrable (elle est indexée par une partie de E) d'événements. Par conséquent, on peut définir une application $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad F_X(a) = \mathbf{P}(X \leqslant a).$$

[106.2] Soient $a \leqslant b$. Pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) \leqslant a$, alors $X(\omega) \leqslant b$, donc

$$[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$$

et par *croissance de la mesure* $\mathbf{P}$,

$$F_X(a) = \mathbf{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant b) = F_X(b).$$

La fonction de répartition F_X est donc une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

En particulier, cette fonction admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en chaque point de $\mathbb{R}$ (*théorème de la limite monotone*).

❧ Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une suite strictement décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a. D'après le *théorème de composition des limites*, la suite de terme général $F_X(u_n)$ converge vers la limite à droite $F_X(a+)$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et tend vers a, alors en particulier $a < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence : si $X(\omega) \leqslant a$, alors $X(\omega) \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit :

$$[X \leqslant a] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n].$$

Réciproquement, si $X(\omega) \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X(\omega) \leqslant a$ (*passage à la limite dans une inégalité large*). Autrement dit :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n] \subset [X \leqslant a].$$

Par *double inclusion*, nous avons démontré que

$$[X \leqslant a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n].$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite des événements $[X \leqslant u_n]$ est décroissante et d'après le *théorème de continuité monotone*,

$$F_X(a) = \mathbf{P}(X \leqslant a) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X \leqslant u_n) = F_X(a+)$$

ce qui prouve que F_x est continue à droite en chaque point $a \in \mathbb{R}$.

❧ De même, on considère une suite strictement décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$. Comme F_X est croissante et minorée, on sait qu'elle tend vers une limite finie ℓ_- au voisinage de $-\infty$ et d'après le *théorème de composition des limites*, cette limite ℓ_- est aussi la limite de la suite de terme général $F_X(u_n)$.

Soit $\omega \in \Omega$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, il existe un rang à partir duquel $u_n < X(\omega)$. Autrement dit :

$$\Omega \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [u_n < X].$$

L'inclusion réciproque est évidente ! Par *passage au complémentaire*, on en déduit que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n] = \varnothing.$$

On applique à nouveau le *théorème de continuité décroissante* (justification analogue) et on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(u_n) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

❧ De même encore une fois, on considère une suite strictement croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Comme F_X est croissante et majorée, elle tend vers une limite finie ℓ_+ au voisinage de $+\infty$ (*théorème de la limite monotone*) et d'après le *théorème de composition des limites*, cette limite ℓ_+ est aussi la limite de la suite de terme général $F_X(u_n)$.

Soit $\omega \in \Omega$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang à partir duquel $X(\omega) \leqslant u_n$. Autrement dit :

$$\Omega \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n]$$

et l'inclusion réciproque est évidente. Cette fois, la suite des événements $[X \leqslant u_n]$ est une suite croissante (car la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), donc on peut déduire du *théorème de continuité croissante* que

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(u_n) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

[106.3] Comme la fonction de répartition F_X est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$ **[106.2]**, elle est discontinue au point x_0 si, et seulement si, sa limite à gauche $F_X(x_0-)$ diffère de sa valeur $F_X(x_0)$ en ce point.

❧ Considérons une suite strictement croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0. D'après le *théorème de composition des limites*, la suite de terme général $F_X(u_n)$ converge vers $F_X(x_0-)$.

Comme $u_n < x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que : s'il existe un rang n tel que $X(\omega) \leqslant u_n$, alors $X(\omega) < x_0$. Autrement dit :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n] \subset [X < x_0].$$

Réciproquement, supposons que $X(\omega) < x_0$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x_0 et est *strictement* croissante, alors il existe un rang à partir duquel $X(\omega) \leqslant u_n$. Par conséquent,

$$[X < x_0] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n].$$

Par *double inclusion*, nous avons démontré que

$$[X < x_0] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X \leqslant u_n].$$

La suite des événements $[X \leqslant u_n]$ est une suite croissante, donc on peut appliquer à nouveau le *théorème de continuité croissante* :

$$\mathbf{P}(X < x_0) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X \leqslant u_n) = F_X(x_0-).$$

❧ Il est clair que

$$[X \leqslant x_0] = [X < x_0] \sqcup [X = x_0].$$

Par *additivité* de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$F_X(x_0) = \mathbf{P}(X < x_0) + \mathbf{P}(X = x_0)$$

c'est-à-dire :

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0-).$$

On a ainsi démontré que F_X était continue au point x_0 si, et seulement si, $\mathbf{P}(X = x_0) = 0$.

[106.4] Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = a) &= F_X(a) - F_X(a-)\\ &= F_Y(a) - F_Y(a-) = \mathbf{P}(Y = a)\end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que X et Y ont même loi.

❧ Réciproquement, supposons que X et Y soient deux variables aléatoires réelles discrètes même loi :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(Y = a).$$

Il existe donc une partie finie ou dénombrable $E \subset \mathbb{R}$ telle que X et Y prennent toutes leurs valeurs dans E. On sait alors que

$$[X \leqslant b] = \bigsqcup_{\substack{a\in E\\ a\leqslant b}} [X = a] \quad \text{et} \quad [Y \leqslant b] = \bigsqcup_{\substack{a\in E\\ a\leqslant b}} [Y = a]$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Il s'agit d'unions (finies ou) dénombrables d'événements deux à deux disjoints. Par *σ-additivité* de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant b) &= \sum_{\substack{a\in E\\ a\leqslant b}} \mathbf{P}(X = a)\\ &= \sum_{\substack{a\in E\\ a\leqslant b}} \mathbf{P}(Y = a) = \mathbf{P}(Y \leqslant b)\end{aligned}$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$, ce qui montre bien que les fonctions de répartition F_X et F_Y sont identiques.