Variables aléatoires [48]

On suppose connus un espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}),$$

une v.a. discrète X et une application f

$$X : \Omega \to E \qquad\qquad f : E \to F$$

(où les ensembles E, F sont finis ou dénombrables).

Nous allons appliquer le théorème de Fubini à la famille $(u_x)_{x\in E}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad u_x = f(x)\, \mathbf{P}(X = x)$$

en considérant la partition de E définie par les lignes de niveau de l'application f : en posant

$$\forall\, y \in F, \qquad L_y = [f(x) = y] = \{x \in E \;:\; f(x) = y\}$$

on a clairement

$$E = \bigsqcup_{y\in F} L_y.$$

Comme E est fini ou dénombrable, chaque partie $L_y \subset E$ est finie ou dénombrable.

❧ On sait **[30]** que la composée

$$Y = f(X) \;:\; \Omega \to F$$

est une variable aléatoire discrète et plus précisément **[30.2]** que

$$\forall\, y \in F, \quad [Y = y] = \bigsqcup_{x\in L_y} [X = x] \in \mathcal{A}.$$

Comme L_y est fini ou dénombrable, il s'agit ici de l'union d'une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints.

Par σ-additivité de la mesure $\mathbf{P}$, on en déduit que, pour tout $y \in F$, la famille $\big(\mathbf{P}(X = x)\big)_{x\in L_y}$ est sommable et que

$$\forall\, y \in F, \quad \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x\in L_y} \mathbf{P}(X = x). \tag{1}$$

La relation (1) exprime la loi de la variable aléatoire discrète Y en fonction de la loi de la variable aléatoire X.

❧ Soit $y \in F$, fixé. Comme $f(x) = y$ pour tous les $x \in L_y$ (par définition même de L_y !), on déduit de (1) que la sous-famille $(|u_x|)_{x\in L_y}$ est sommable et que

$$\sum_{x\in L_y} |u_x| = \sum_{x\in L_y} |y|\; \mathbf{P}(X = x) = |y|\, \mathbf{P}(Y = y). \tag{2}$$

D'après le théorème de Fubini pour les familles de réels *positifs* (alias Fubini 1), la famille $(u_x)_{x\in E}$ est donc sommable si, et seulement si, la famille

$$\big(|y|\, \mathbf{P}(Y = y)\big)_{y\in F}$$

est sommable.

Autrement dit, la composée $Y = f(X)$ est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(u_x)_{x\in E}$ est sommable.

❧ Supposons maintenant que $Y = f(X)$ soit une variable aléatoire d'espérance finie.

Cela signifie d'une part que la famille

$$\big(y\,\mathbf{P}(Y = y)\big)_{y\in F}$$

est sommable et que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{y\in F} y\,\mathbf{P}(Y = y),$$

et d'autre part que la famille $(u_x)_{x\in E}$ est sommable (d'après le raisonnement précédent).

Pour tout $y \in F$, la famille $(u_x)_{x\in L_y}$ est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable) et la valeur de $f(x)$ est *constante* lorsque x parcourt L_y (par définition de L_y), donc

$$\sum_{x\in L_y} u_x = \sum_{x\in L_y} y\ \mathbf{P}(X = x) = y\,\mathbf{P}(Y = y) \qquad (3)$$

(même raisonnement que pour (2)). D'après le théorème de Fubini pour les familles sommables (alias Fubini 2),

$$\sum_{x\in E} u_x = \sum_{y\in F}\sum_{x\in L_y} u_x.$$

D'après (3),

$$\sum_{x\in E} u_x = \sum_{y\in F} y\,\mathbf{P}(Y = y).$$

Autrement dit,

$$\sum_{x\in E} f(x)\,\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}[f(X)]$$

ce qui signifie qu'on n'a pas besoin de calculer la loi de $f(X)$ pour calculer son espérance : il suffit de connaître la loi de X.

REMARQUE.— Il n'est pas simple de bien rédiger une telle démonstration : il faut *commencer*, comme je l'ai fait, par précisément définir

1. la famille $(u_x)_{x\in E}$ de nombres à étudier et
2. la partition de l'ensemble d'indices

$$E = \bigsqcup_{y\in F} L_y$$

avec laquelle on va appliquer les théorèmes de Fubini.