> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
> **1.** *Si* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors* X *est aussi un vecteur propre de* $\exp(A)$, *associé à la valeur propre* e^{λ}.
> **2.** *Si* $Q^{-1}AQ = T$, *alors* $Q^{-1}.\exp(A).Q = \exp(T)$.
> **3.** *Si le polynôme caractéristique de* A *est scindé, alors le polynôme caractéristique de* $\exp(A)$ *est scindé lui aussi. En déduire l'égalité suivante.*
>
> $$\det[\exp(A)] = \exp(\operatorname{tr} A)$$
>
> *(NB : cette égalité est vraie pour toute matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *même lorsque le polynôme caractéristique* χ_A *n'est pas scindé.)*

1. Par hypothèse,

$$AX = \lambda X.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = \lambda^k X$$

et donc que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\Big).X = \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda^k\Big).X. \tag{$\star$}$$

❧ Premier rappel de topologie : on considère une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k \cdot X - \ell \cdot X\| = |u_k - \ell| \cdot \|X\|.$$

Cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} u_k \cdot X = \ell \cdot X.$$

✍ *Nous démontrerons que toutes les applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues. Or l'application* $[\lambda \mapsto \lambda \cdot X]$ *est linéaire ! Donc elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est donc qu'un cas d'application du Théorème de composition des limites.*

Deuxième rappel de topologie : on suppose que l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ précédemment choisie sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices qui tend vers la matrice L.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \|M_k.X - L.X\| = \|(M_k - L).X\| \leqslant |||M_k - L|||\ \|X\|.$$

Par encadrement, cette norme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} M_k.X = L.X.$$

✍ *Comme* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *sont tous les deux des espaces vectoriels de dimension* FINIE, *toutes les normes existant sur ces deux espaces sont équivalentes.*

En supposant que la suite des matrices converge vers la matrice L *pour la norme subordonnée à la norme choisie sur* $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on suppose en fait que cette suite converge vers* L *pour une norme quelconque sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, l'application $[M \mapsto MX]$ *est linéaire ! Comme précédemment, elle est continue et le résultat que nous avons démontré par le calcul des normes n'est qu'un nouveau cas d'application du Théorème de composition des limites.*

❧ On peut alors déduire de $(\star)$ que

$$\exp(A).X = e^{\lambda}.X$$

et comme $X \neq 0$ (par hypothèse, X est un vecteur propre de A), on en déduit que X est aussi un vecteur propre de $\exp(A)$ associé à e^{λ}.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Supposons que les deux matrices A et T soient semblables. Il existe donc une matrice inversible Q telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1}A^kQ = T^k.$$

On en déduit que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad Q^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\Big)Q = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}T^k.$$

Par définition, le second membre tend vers $\exp(T)$ et

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k = \exp(A).$$

L'application $\Phi = \big[M \mapsto Q^{-1}MQ\big]$ est LINÉAIRE sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, espace vectoriel DE DIMENSION FINIE, donc elle est continue (voir les remarques précédentes). D'après le Théorème de composition des limites,

$$\lim_{N\to+\infty} \Phi\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\Big) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\Phi(A^k)$$

c'est-à-dire

$$Q^{-1}.\exp(A).Q = \exp(T).$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A est trigonalisable. Elle est donc semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

On sait alors que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} u_1^k & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^k \end{pmatrix}$$

et on en déduit que (combinaison linéaire, puis passage à la limite coefficient par coefficient)

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{u_1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & e^{u_n} \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, la matrice $\exp(A)$ est semblable à $\exp(T)$. Ces deux matrices ont donc le même polynôme caractéristique, donc le polynôme caractéristique de $\exp(A)$ est scindé :

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^{n} (X - e^{u_k}).$$

✍ *On peut être plus précis en considérant la multiplicité des valeurs propres de A.*
Si le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k},$$

alors

$$\chi_{\exp(A)} = \prod_{k=1}^{r} (X - e^{\lambda_k})^{m_k}.$$

Si les valeurs propres de A sont réelles, *alors on peut en déduire les multiplicités des valeurs propres de* $\exp(A)$.

En revanche, si les valeurs propres de A *sont* complexes*, on risque des surprises : la fonction* exp *n'est pas injective sur* $\mathbb{C}$ *(elle est* $2i\pi$*-périodique, je n'avais pas besoin de le rappeler), donc il se peut que* $\exp(A)$ *ait moins de valeurs propres que* A*...*

❧ Comme les matrices T et $\exp(T)$ sont triangulaires, on sait que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \det(\exp T) = \prod_{k=1}^{n} e^{u_k}.$$

Comme T et A sont semblables et que $\exp(T)$ et $\exp(A)$ sont semblables, on en déduit que

$$\det(\exp A) = \det(\exp T) = \exp(\operatorname{tr} T) = \exp(\operatorname{tr} A).$$