Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \frac{e^{3t}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2te^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{t}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ **Trigonalisation de** A

On vérifie sans peine que le polynôme caractéristique de A est égal à

$$P_0 = (X-3)^2(X-1).$$

❧ Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ est donc une droite et comme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut remarquer que $C_2 - C_3 = 0$ et en déduire que

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{où} \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

❧ Le sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2$ est un plan et comme le rang de la matrice

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)$ est une droite vectorielle :

$$\operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à la dimension de l'espace, la matrice* A *n'est pas diagonalisable.*

Comme son polynôme caractéristique est scindé, elle est néanmoins trigonalisable.

❧ La matrice

$$(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

nous donne une équation cartésienne du sous-espace caractéristique :

$$\operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2 = [y - z = 0].$$

✍ *Si un vecteur du sous-espace caractéristique* $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^m$ *est un vecteur propre de* A, *c'est nécessairement un vecteur propre associé à* λ.

Choisissons un vecteur ε_3 dans ce sous-espace caractéristique, en veillant à ce que ce vecteur ne soit pas un vecteur propre de A : ce vecteur doit vérifier l'équation cartésienne sans être proportionnel au vecteur $(1, 0, 0)$. Le vecteur

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

convient à l'évidence.

Posons maintenant

$$\varepsilon_2 = (A - 3I_3)\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

❧ Par hypothèse, $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2$ et $(A - 3I_3)\varepsilon_3 \neq 0$.
On en déduit que $(A - 3I_3)\varepsilon_2 = (A - 3I_3)^2\varepsilon_3 = 0$ et donc que

$$\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(A - 3I_3) \subset \operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

✍ *On aurait pu remarquer que ε_3 appartenait au sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A-3I_3)^2$ et que ce sous-espace est stable par A (en tant que noyau d'un polynôme en A) pour en déduire que ε_2 appartenait aussi à ce sous-espace caractéristique.*

Comme ε_2 est un vecteur propre et que ε_3 n'est pas un vecteur propre, ce deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Par conséquent, le couple $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de deux vecteurs dans le sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2$. Comme ce sous-espace est un plan, on en déduit que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de ce plan.

✍ *Le raisonnement qui précède ne dépend pas du vecteur ε_3 choisi, il est strictement théorique.*

❧ D'après le Théorème de décomposition des noyaux, comme P_0 est un polynôme annulateur de A (Théorème de Cayley-Hamilton) et que les facteurs $(X - 3)^2$ et $(X - 1)$ sont premiers entre eux,

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2.$$

Par conséquent, en concaténant la "famille" (ε_1), qui est une base du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3)$, avec la famille $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, qui est une base du sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2$, on obtient une base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de $\mathbb{R}^3$.

❧ Récapitulons ce qu'on a décidé pour construire la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} A\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 && \text{(vecteur propre associé à 1)} \\ A\varepsilon_2 &= 3 \cdot \varepsilon_2 && \text{(vecteur propre associé à 3)} \\ A\varepsilon_3 &= 3\varepsilon_3 + \varepsilon_2 && \text{(définition du vecteur } \varepsilon_2\text{)} \end{aligned}$$

Notons enfin f, l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique.
Dans la base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme A et J représente le même endomorphisme f dans deux bases différentes, ces deux matrices sont semblables.

✍ *La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ s'obtient en écrivant en colonnes les vecteurs de $\mathscr{B}$.*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base,

$$J = P^{-1}AP.$$

On va voir par la suite que la connaissance de la matrice P est inutile.

❧ **Puissances de A avec division euclidienne**

✍ *La connaissance d'un polynôme annulateur scindé permet de calculer assez facilement les puissances d'une matrice. Méthode à maîtriser !*

❧ Comme P_0 est un polynôme annulateur de degré 3, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_k, R_k) de polynômes tels que

$$X^k = P_0Q_k + R_k \quad \text{avec} \quad \deg R_k \leqslant 2. \tag{1}$$

Il existe donc trois réels a_k, b_k et c_k tels que

$$R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k.$$

On obtient deux relations en substituant les racines de P_0 à X dans la division euclidienne (1).

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 9a_k + 3b_k + c_k = 3^k \end{cases}$$

Comme P_0 possède une racine double, on dérive (1) :

$$kX^{k-1} = P_0' Q_k + P_0 Q_k' + R_k' \quad \text{avec} \quad R_k' = 2a_k X + b_k$$

et en substituant la racine double à X dans cette égalité, on obtient une troisième relation.

$$6a_k + b_k = k3^{k-1}$$

❧ Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} a_k + b_k + c_k = 1 \\ 8a_k + 2b_k = 3^k - 1 \\ 6a_k + b_k = k3^{k-1} \end{cases}$$

(On a effectué $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.)

Il faut remarquer que a_k et b_k vérifient un système 2x2, qu'on peut résoudre avec les formules de Cramer. Avec un peu de concentration, on trouve :

$$\begin{aligned} \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad a_k &= \frac{-1}{4}\big(3^k - 2k.3^{k-1} - 1\big), \\ b_k &= \frac{-1}{4}\big(-6.3^k + 8k.3^{k-1} + 6\big), \\ c_k &= \frac{-1}{4}\big(5.3^k - 6k.3^{k-1} - 9\big). \end{aligned}$$

❧ Comme $P_0(A) = 0_3$, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \frac{-3^k}{4}[A^2 - 6A + 5I_3] + \frac{k3^{k-1}}{2}[A^2 - 4A + 3I_3] + \frac{1}{4}[A^2 - 6A + 9I_3]$$

ce qu'il vaut mieux écrire

$$A^k = \frac{-3^k}{4}(A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{k3^{k-1}}{2}(A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2$$

pour simplifier le calcul des produits matriciels.

✍ *Le calcul de A^2 n'est pas très compliqué, mais il faut ensuite calculer simplifier trois polynômes en A. Les matrice $(A - I_3)$, $(A - 3I_3)$ et $(A - 3I_3)^2$ ont **déjà** été calculées et comme elles ne sont pas inversibles, les produits sont plus faciles à calculer.*

❧ **Puissances de A avec l'identité de Bézout**

On a appliqué plus haut le Théorème de décomposition des noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A - I_3). \tag{2}$$

✍ *La résolution de l'équation de Bézout va nous permettre de calculer les projections associées à cette décomposition en somme directe, puis d'en déduire les puissances de A.*

❧ Les facteurs $P_1 = (X-3)^2$ et $P_2 = (X-1)$ étant premiers entre eux, les polynômes $Q_1 = (X-1)$ et $Q_2 = (X - 3)^2$ sont premiers dans leur ensemble. On peut alors vérifier (avec la méthode habituelle) que

$$\frac{1}{4}(5 - X)Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition (2) sont donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(5I_3 - A)(A - I_3) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2. \tag{3}$$

✍ *Il faut suivre les indices pour s'y retrouver : la projection Π_1 envoie sur le sous-espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A - 3I_3)^2 = \operatorname{Ker} P_1(A)$ et la projection Π_2 envoie sur le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Ker} P_2(A)$.*

On remarquera qu'on a déjà croisé ces deux matrices !

❧ Sur le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Im}\,\Pi_2$, l'application $(A - I_3)$ est identiquement nulle. Par conséquent,

$$(A - I_3) \times \Pi_2 = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \times \Pi_2 = \Pi_2. \tag{4}$$

De même, sur le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(A - 3I_3)^2 = \mathrm{Im}\,\Pi_2$, l'application $(A - 3I_3)^2$ est identiquement nulle :

$$(A - 3I_3)^2 \times \Pi_1 = 0_3. \tag{5}$$

D'après le cours, en restriction à ce sous-espace, la matrice A est la somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente. En effet, en posant

$$N = (A - 3I_3) \times \Pi_1,$$

on a

$$A \times \Pi_1 = 3\Pi_1 + N$$

mais aussi

$$(A - 3I_3)N = 0_3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad AN = 3N.$$

Comme $P_0(A) = 0_3$, on peut vérifier que

$$N = \frac{1}{4}(A - 3I_3)(5I_3 - A)(A - I_3) = \frac{1}{2}(A - 3I_3)(A - I_3) \tag{6}$$

et donc que

$$N^2 = \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2(A - I_3)^2 = 0_3.$$

❧ Bref :

$$A\Pi_1 = 3\Pi_1 + N, \quad A\Pi_2 = \Pi_2, \quad AN = 3N$$

et on démontre par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k\Pi_1 = 3^k\Pi_1 + k3^{k-1}N \quad \text{et} \quad A^k\Pi_2 = \Pi_2.$$

Comme $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = 3^k\Pi_1 + k3^{k-1}N + \Pi_2.$$

Comme $\Pi_1 + \Pi_2 = I_3$, cette relation est vraie aussi pour $k = 0$.

En revenant à (3) et (6),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \frac{3^k}{4}(5I_3 - A)(A - I_3) + \frac{k3^{k-1}}{2}(A - 3I_3)(A - I_3) + \frac{1}{4}(A - 3I_3)^2.$$

❧ **Exponentielle de tA**

Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k.$$

Ayant calculé les puissances de A, on a fait le plus difficile ! Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \frac{-e^{3t}}{4}(A - I_3)(A - 5I_3) + \frac{te^{3t}}{2}(A - I_3)(A - 3I_3) + \frac{e^t}{4}(A - 3I_3)^2$$

avec

$$(A - I_3)(A - 5I_3) = -2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_3)(A - 3I_3) = 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(La matrice $(A - 3I_3)^2$ a été calculée plus haut.)