

Le triplet de fonctions (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe trois réels K_1, K_2 et K_3 tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 + K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

Le système étudié se traduit sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et se résout habituellement en trigonalisant la matrice A .

↳ Nous allons présenter trois méthodes :

- la première est une trigonalisation rapide, le but étant de résoudre au plus vite le système différentiel ;
- la seconde est une trigonalisation poussée, le but étant d'obtenir la **forme normale de Jordan** de A (ce qui fait passer la résolution du système différentiel au second plan) ;
- la troisième méthode se donne pour but de calculer la matrice $\exp(tA)$ le plus vite possible.

• Analyse de la matrice A

On vérifie sans peine que

- le polynôme caractéristique de A est le polynôme $X^2(X + 1)$;
- le sous-espace propre $\text{Ker}(A + I_3)$ est la droite dirigée par $(1, -1, -2)$;
- le sous-espace propre $\text{Ker } A$ est la droite dirigée par $(1, 2, 0)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ($1+1 = 2$) est strictement inférieure à la dimension de l'espace (3), la matrice A n'est pas diagonalisable.

Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, cette matrice est trigonalisable. En tenant compte de son spectre et des multiplicités respectives de ses deux valeurs propres, la matrice A est donc semblable à une matrice T de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

↳ Plus précisément, puisqu'on a caractérisé les deux sous-espaces propres, dès que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ -1 & 2 & * \\ -2 & 0 & * \end{pmatrix}$$

est inversible, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, la première (resp. deuxième) colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 (resp. 0), ce qui détermine les deux premières colonnes de $P^{-1}AP$.

D'autre part, les matrices A et $P^{-1}AP$ sont semblables, donc leurs traces sont égales, c'est pourquoi le troisième coefficient diagonal de $P^{-1}AP$ est égal à 0 .

Il ne reste plus qu'à choisir la troisième colonne de P .

• Première méthode

Quelle que soit la manière de compléter la matrice P , on sait que la matrice $P^{-1}AP$ sera nécessairement triangulaire et cela suffit pour rendre facile la résolution du système différentiel. On n'a donc plus qu'une seule contrainte : choisir une troisième colonne telle que la matrice P soit inversible.

Le choix le plus simple est ici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

↳ *Quels sont les autres choix possibles ? En fait, il suffit que la troisième colonne n'appartienne pas au plan engendré par les deux premières colonnes.*

On peut trouver les coefficients d'une équation cartésienne de ce plan en calculant le produit vectoriel des deux premières colonnes. Il suffira alors de choisir une colonne qui ne vérifie pas cette équation cartésienne.

Mais on peut aussi comprendre qu'en choisissant une colonne au hasard dans \mathbb{R}^3 , la probabilité pour que cette colonne appartienne à un plan vectoriel donné est extrêmement faible : si on a un tempérament joueur, on pourra choisir la troisième colonne au hasard.

Pour déterminer la troisième colonne de $P^{-1}AP$, on revient à la définition de la matrice d'une application linéaire :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t),$$

la résolution du système $X'(t) = A.X(t)$ équivaut à la résolution du système

$$Y'(t) = (P^{-1}AP).Y(t),$$

c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} u' = -u - 2w \\ v' = 4w \\ w' = 0 \end{cases}.$$

Le triplet (u, v, w) est donc une solution si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2, K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = K_1 e^{-t} - 2K_3, \\ v(t) = K_2 + 4K_3 t, \\ w(t) = K_3. \end{cases}$$

On en déduit que le triplet (x, y, z) est une solution du système initial si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} - 2K_3 \\ K_2 + 4K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

• Deuxième méthode

D'après un théorème de Camille Jordan (1838-1922), la matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est à la fois diagonale par blocs et triangulaire.

Analysons cette matrice T : en considérant qu'elle représente l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par $A = \mathcal{M}_{\text{can}}(f)$ dans une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il faut que :

Première colonne • ε_1 soit un vecteur propre de f associé à -1 ;

Deuxième colonne • ε_2 soit un vecteur propre de f associé à 0 , c'est-à-dire un vecteur du noyau de f ;

Troisième colonne • $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$ et donc que ε_3 appartienne au noyau de f^2 sans appartenir au noyau de f (il faut que $\varepsilon_2 \neq 0$, c'est un vecteur de base).

On voit clairement que le rang de la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à 1. Chaque ligne de cette matrice nous donne donc une équation cartésienne du noyau de A^2 :

$$\text{Ker } A^2 = [2x - y + z = 0].$$

On choisit un vecteur dans $\text{Ker } A^2$ mais pas dans $\text{Ker } A$, c'est-à-dire pas proportionnel à $(1, 2, 0)$: prenons par exemple $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et posons alors

$$\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▮ *Quel que soit le choix de $\varepsilon_3 \in \text{Ker } f^2$, le vecteur $f(\varepsilon_3)$ appartient au noyau de f et est donc proportionnel à $(1, 2, 0)$ (pas forcément égal à $(1, 2, 0)$ comme c'est le cas ici) : en posant $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3)$, on est sûr que ε_2 sera un vecteur propre de A associé à 0.*

La seule contrainte à respecter est donc de choisir ε_3 dans $\text{Ker } f^2 \setminus \text{Ker } f$ (pour que $\varepsilon_2 \neq 0$!).

En posant cette fois

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système triangulaire qui s'en déduit n'est pas plus simple que le précédent système triangulaire — pas plus compliqué non plus !

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = w \\ w' = 0 \end{cases}$$

• Variante de la deuxième méthode

Comme le polynôme $(X + 1)X^2$ est un polynôme annulateur de A et que les facteurs $(X + 1)$ et X^2 sont premiers entre eux, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A + I) \oplus \text{Ker } A^2.$$

Les deux sous-espaces $\text{Ker}(A + I)$ et $\text{Ker } A^2$ sont stables par A (ce sont tous les deux le noyau d'un polynôme en A). Par conséquent, en choisissant une base de \mathbb{R}^3 adaptée à cette décomposition en somme directe, on trouvera une matrice semblable à A et diagonale par blocs.

On choisit $\varepsilon_1 = (1, -1, -2)$ comme vecteur directeur de la droite $\text{Ker}(A + I)$ (c'est le choix qui me paraît le plus simple — mais c'est une question de goût).

Il reste à choisir une base de $\text{Ker } A^2 = [2x - y + z = 0]$: le plus simple est de choisir pour commencer un vecteur de $\text{Ker } A$ (= vecteur propre associé à 0)

$$\varepsilon_2 = (1, 2, 0)$$

et de compléter ensuite comme on veut :

$$\varepsilon_3 = (1, 1, -1).$$

Par choix de ε_2 , on a $f(\varepsilon_2) = 0$ et comme ε_3 appartient au sous-espace stable $\text{Ker } A^2 = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il existe deux scalaires a et b tels que

$$f(\varepsilon_3) = a \cdot \varepsilon_2 + b \cdot \varepsilon_3.$$

Effectivement,

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3.$$

Bref, dans cette nouvelle base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut terminer la résolution comme plus haut.

☞ *J'ai déjà expliqué plus haut pourquoi on savait (avant de faire les calculs!) que b serait nul et que $f(\varepsilon_3)$ serait proportionnel à ε_2 . Une seconde lecture ne peut pas faire de mal!*

☛ Troisième méthode

Pour calculer $\exp(tA)$, il faut calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour aller vite, il faut éviter de changer de base.

On connaît un polynôme annulateur de $A : (X + 1)X^2$, qui nous donne la relation

$$A^3 = -A^2.$$

☞ *C'est le polynôme caractéristique, mais c'est aussi le polynôme minimal : pourquoi?*

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = (-1)^n A^2$$

et donc que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = I_3 + t \cdot A + \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \right) \cdot A^2 \\ &= I_3 + t \cdot A + (e^{-t} - 1 + t) \cdot A^2 \\ &= (I_3 - A^2) + t \cdot (A + A^2) + e^{-t} \cdot A^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = (I_3 - A^2) \cdot X(0) + t \cdot (A + A^2) \cdot X(0) + e^{-t} \cdot A^2 \cdot X(0)$$

ce qui nous donne la solution du système différentiel associée à la condition initiale

$$(t_0 = 0, X_0 = X(0)).$$