$\boxed{\textbf{1.}}$ *La fonction* f *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation*

$$(1+t^2)^2x''(t)+2(t-1)(1+t^2)x'(t)+x(t)=0$$

si, et seulement si, la fonction g *définie par* $g(\theta)=f(\tan\theta)$ *est une solution de*

$$\forall\,\theta\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[,\quad y''(\theta)-2y'(\theta)+y(\theta)=0.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Les solutions* f *sont les fonctions de la forme*

$$e^{\operatorname{Arctan} t}(K_1+K_2\operatorname{Arctan} t).$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ **Changement de variable**

❧ La fonction $[\theta\mapsto\tan\theta]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de

$$I=\left]-\pi/2,\pi/2\right[$$

sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque $[t\mapsto\operatorname{Arctan} t]$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

❧ Par conséquent, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la composée g définie par

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \theta & \longmapsto & \tan\theta & \longmapsto & f(\tan\theta)=g(\theta)\end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, réciproquement, si g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors la composée f définie par

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \operatorname{Arctan} t & \longmapsto & g(\operatorname{Arctan} t)=f(t)\end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

❧ Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g(\theta)=f(\tan\theta)$, alors

$$\forall\,\theta\in I,\quad g'(\theta)=(1+\tan^2\theta)f'(\tan\theta)$$
$$g''(\theta)=2\tan\theta(1+\tan^2\theta)f'(\tan\theta)+(1+\tan^2\theta)^2f''(\tan\theta)$$

et par conséquent l'expression

$$g''(\theta)-2g'(\theta)+g(\theta)$$

est égale à

$$(1+\tan^2\theta)^2f''(\tan\theta)+2(1+\tan^2\theta)(\tan\theta-1)f'(\tan\theta)+f(\tan\theta).$$

On a déjà remarqué que le changement de variable $t=\tan\theta$ réalisait une bijection entre l'intervalle I et l'intervalle $\mathbb{R}$, donc l'équation différentielle

$$\forall\,\theta\in I,\quad g''(\theta)-2g'(\theta)+g(\theta)=0$$

équivaut à l'équation différentielle

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad (1+t^2)^2f''(t)+2(1+t^2)(t-1)f'(t)+f(t)=0. \tag{$\star$}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ **Résolution de l'équation auxiliaire**

❧ L'équation différentielle $y''(\theta)-2y'(\theta)+y(\theta)=0$ est linéaire, homogène et à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$X^2-2X+1=(X-1)^2=0$$

donc g est solution de cette équation différentielle si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\,\theta\in I,\quad g(\theta)=(A\theta+B)e^\theta.$$

Résolution

❧ D'après ce qui précède, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est solution de l'équation différentielle $(\star)$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad f(t)=(A.\operatorname{Arctan} t+B)e^{\operatorname{Arctan} t}.$$