

1. Une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de

$$t^2 x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(s) = f(e^s)$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4.$$

2. Les solutions  $f$  sont les fonctions de la forme

$$K_1 \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3} \ln t)}{t} + \left(1 + \frac{t}{7}\right).$$

1. **Changement de variable**

- La fonction  $[s \mapsto e^s]$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa réciproque  $[t \mapsto \ln t]$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Par conséquent, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors la composée  $g$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto e^s \longmapsto f(e^s) = g(s) \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et, réciproquement, si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , alors la composée  $f$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \ln t \longmapsto g(\ln t) = f(t) \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Si  $g(s) = f(e^s)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \quad g'(s) &= e^s f'(e^s), \\ g''(s) &= e^s f'(e^s) + e^{2s} f''(e^s) \end{aligned}$$

si bien que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s).$$

On en déduit que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g''(s) + 2g'(s) + 4g(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad (e^s)^2 f''(e^s) + 3e^s f'(e^s) + 4f(e^s) = e^s + 4.$$

Comme  $[s \mapsto e^s = t]$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , cette dernière équation équivaut à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t + 4.$$

2.

• L'équation différentielle vérifiée par  $f$  est linéaire, mais on ne connaît pas de méthode simple pour la résoudre.

• Au contraire, l'équation différentielle vérifiée par la fonction auxiliaire  $g$  est linéaire et à coefficients constants : on connaît donc une recette pour résoudre cette équation.

**Résolution de l'équation auxiliaire**

- Les racines de l'équation caractéristique sont  $-1 \pm i\sqrt{3}$ , donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad y_H(s) = e^{-s}(K_1 \cos \sqrt{3}s + K_2 \sin \sqrt{3}s).$$

- Le second membre est la superposition d'une exponentielle et d'une constante.

Comme  $[s \mapsto e^s]$  n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s$$

de la forme  $y_1(s) = \lambda e^s$ . En substituant, on trouve  $\lambda = 1/7$ .

De même, comme  $[s \mapsto 4]$  n'est pas une solution de l'équation homogène, on sait qu'il existe une solution particulière de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = 4$$

de la forme  $y_2(s) = \mu$ . En substituant, on trouve  $\mu = 1$ .

D'après le principe de superposition, une fonction  $y$  est solution de l'équation complète

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4$$

si, et seulement si, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \quad y(s) &= y_H(s) + y_1(s) + y_2(s) \\ &= e^{-s}(K_1 \cos \sqrt{3}s + K_2 \sin \sqrt{3}s) + \frac{e^s}{7} + 1. \end{aligned}$$

### Résolution

• D'après la première partie, une fonction  $f$  est solution de l'équation

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4 \quad (*)$$

si, et seulement si, la fonction  $g = [s \mapsto f(e^s)]$  est une solution de l'équation auxiliaire.

• On en déduit que  $f$  est solution de (\*) si, et seulement si, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad f(t) &= y(\ln t) \\ &= e^{-\ln t} [K_1 \cos(\sqrt{3} \ln t) + K_2 \sin(\sqrt{3} \ln t)] + \frac{e^s}{7} + 1 \\ &= K_1 \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3} \ln t)}{t} + \frac{t}{7} + 1. \end{aligned}$$