Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ *La fonction définie par* $x(t) = t^\lambda z(t)$ *est solution de*

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \lambda^2)x(t) = 0 \tag{B_λ}$$

si, et seulement si,

$$\forall\, t > 0, \quad tz''(t) + (2\lambda + 1)z'(t) + tz(t) = 0. \tag{B'_λ}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Si* $\lambda = -1/2$, *les solutions de* (B_λ) *sont les fonctions de la forme*

$$x(t) = K_1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + K_2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ *Si* $\lambda = 1/2$, *les solutions de* (B'_λ) *sont les fonctions de la forme*

$$z(t) = K_1 \frac{\cos t}{t} + K_2 \frac{\sin t}{t}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Changement d'inconnue

❧ Soit $I =]0, +\infty[$. Pour tout $t \in I$, le réel t^λ est défini et strictement positif. Par conséquent,

$$x(t) = t^\lambda z(t) \iff z(t) = t^{-\lambda} x(t)$$

et la fonction x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I si, et seulement si, la fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

❧ Pour tout $t > 0$, avec $x(t) = t^\lambda z(t)$, on a

$$x'(t) = \lambda \frac{x(t)}{t} + t^\lambda z'(t)$$
$$x''(t) = \lambda(\lambda - 1)\frac{x(t)}{t^2} + 2\lambda t^{\lambda-1} z'(t) + t^\lambda z''(t).$$

✍ *Il est judicieux de penser à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde de ce* produit.

Par conséquent, pour tout $t > 0$, l'expression

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \lambda^2)x(t)$$

est égale à

$$t^{\lambda+2} z''(t) + (2\lambda + 1)t^{\lambda+1} z'(t) + t^{\lambda+2} z(t).$$

On peut factoriser par $t^{\lambda+1} > 0$ et en déduire que

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \lambda^2)x(t) = 0 \tag{B_λ}$$

si, et seulement si,

$$\forall\, t > 0, \quad tz''(t) + (2\lambda + 1)z''(t) + tz(t) = 0. \tag{B'_λ}$$

✍ *Ce* si, et seulement si, *est capital pour la suite !*

$\boxed{\textbf{2.}}$ Résolution dans le cas $\lambda = -1/2$

❧ Pour $\lambda = -1/2$, sur l'intervalle I où t ne s'annule pas, l'équation (B'_λ) devient une équation à coefficients constants :

$$\forall\, t > 0, \quad z''(t) + z(t) = 0.$$

Par conséquent, z est une solution de (B'_λ) si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t > 0, \quad z(t) = A\cos t + B\sin t.$$

On en déduit que x est une solution (B_λ) si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = t^{-1/2} z(t) = A\frac{\cos t}{\sqrt{t}} + B\frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

3. Résolution dans le cas $\lambda = 1/2$

❧ Le paramètre λ est élevé au carré dans l'équation (B_λ). Par conséquent, les solutions de $(B_{-\lambda})$ sont aussi les solutions de (B_λ) : même équation, mêmes solutions !

❧ D'après la première partie, une fonction z est solution de $(B'_{1/2})$ si, et seulement si, $x(t) = \sqrt{t}.z(t)$ est solution de $(B_{1/2})$.

D'après ce qui précède, x est une solution de $(B_{1/2})$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = A\frac{\cos t}{\sqrt{t}} + B\frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Donc z est une solution de $(B'_{1/2})$ si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t > 0, \quad z(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{t}} = A\frac{\cos t}{t} + B\frac{\sin t}{t}.$$

✍ *On peut résumer la démarche que nous venons de suivre par un diagramme.*

$$(B'_{-1/2}) \longrightarrow (B_{-1/2}) = (B_{1/2}) \longrightarrow (B'_{1/2})$$