On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2x(t) = 3t^2 \tag{E}$$

On notera Σ_E, l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et Σ_H, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

1. *Déterminer les fonctions de Σ_H qui sont de la forme $[t \mapsto t^\alpha]$. En déduire une base de Σ_H.*

2. *Déterminer les fonctions de Σ_E.*

Mise sous forme canonique —

Sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, le facteur de $x''(t)$ ne s'annule pas : il n'y a pas de singularité sur cet intervalle. On peut donc écrire l'équation différentielle scalaire du second ordre (E) sous forme canonique :

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \qquad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{E'}$$

en posant

$$\forall\, t \in I, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une fonction X est solution de l'équation canonique (E') si, et seulement si, la première composante de X est solution de l'équation scalaire (E).

❧ Les coefficients de $A(t)$ et de $B(t)$ sont tous des fonctions continues de t sur l'intervalle I et l'inconnue X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans un espace vectoriel de dimension 2.

On déduit alors du Théorème de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène associée à l'équation canonique (E') est un espace vectoriel de dimension 2 et que, quelle que soit la **condition initiale**

$$\big(t_0, (x_0, v_0)\big) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2,$$

il existe une, et une seule, solution X de (E') telle que $X(t_0) = (x_0, v_0)$.

❧ L'application $[f \mapsto (f, f')]$ est une bijection de l'ensemble Σ_E des solutions de l'équation (E) sur l'ensemble S_E des solutions de l'équation canonique (E') et même un isomorphisme de l'espace vectoriel Σ_H des solutions de l'équation homogène associée à (E) sur l'espace vectoriel S_H des solutions de l'équation homogène associée à l'équation canonique (E').

Donc Σ_H est un espace vectoriel de dimension 2 et, quel que soit $(t_0, x_0, v_0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une, et une seule, solution x de (E) telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $y = [t \mapsto t^\alpha]$ appartient à Σ_H si, et seulement si,

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \quad t^2 \cdot \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} - 2t^\alpha = 0,$$

c'est-à-dire si $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$: les deux possibilités sont $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$.

❧ Ainsi, les deux fonctions $[t \mapsto 1/t]$ et $\big[t \mapsto t^2\big]$ appartiennent à Σ_H. On sait (voir plus haut) que Σ_H est un espace vectoriel de dimension 2 et il est clair que les fonctions $[t \mapsto 1/t]$ et $\big[t \mapsto t^2\big]$ ne sont pas proportionnelles. Par conséquent, ces deux fonctions forment une *base* du plan Σ_H.

✍ *Autrement dit, une fonction y appartient au plan Σ_H si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que*

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \qquad y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t^2.$$

L'isomorphisme entre Σ_H et S_H nous dit alors qu'une fonction Y appartient au plan S_H si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \qquad Y(t) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}}_{F_1(t)} + \frac{\mu}{t^2} \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}}_{F_2(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 & 1/t \\ 2t & -1/t^2 \end{pmatrix}}_{M(t)} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Le couple (F_1, F_2) est alors une <u>base</u> du plan S_H et la théorie du wronskien nous assure que la matrice $M(t)$ est inversible pour tout $t \in I$. (Le déterminant de cette matrice est, par définition, un wronskien de l'équation.)

2. Pour déterminer les fonctions de Σ_E, nous allons d'abord déterminer les fonctions de S_E en faisant varier la constante.

✍ *En résolvant l'équation homogène associée à l'équation canonique (E'), nous avons déterminé une **matrice fondamentale** $M(t)$. L'application $[t \mapsto M(t)]$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie*

$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \qquad M'(t) = A(t)M(t).$$

Pour toute fonction $Y \in S_H$, il existe un vecteur Λ (indépendant de t) tel que $Y(t) = M(t)\Lambda$ pour tout $t \in I$. Nous allons maintenant chercher une solution particulière de l'équation canonique (E') sous la forme $Y(t) = M(t)\Lambda(t)$ en supposant que $[t \mapsto \Lambda(t)]$ soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

❧ En tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction

$$Y = [t \mapsto M(t)\Lambda(t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et (formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit)

$$\forall\, t \in I, \qquad Y'(t) = M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = A(t)M(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = A(t)Y(t) + M(t)\Lambda'(t).$$

Par conséquent, Y est solution de (E') si, et seulement si,

$$\forall\, t \in I, \quad M(t)\Lambda'(t) = B(t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall\, t \in I, \quad \Lambda'(t) = \big[M(t)\big]^{-1}B(t)$$

puisque $M(t)$ est inversible.

On en déduit *une expression possible* de $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \ell n\, t \\ -t^3/3 \end{pmatrix}$$

et une solution particulière de l'équation scalaire (E) :

$$Y(t) = M(t)\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell n\, t \\ -t^3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2\, \ell n\, t - t^2/3 \\ \star \end{pmatrix}.$$

✍ *On ne cherche pas vraiment à résoudre l'équation canonique (E'), c'est seulement les solutions de l'équation scalaire (E) qui nous intéressent. C'est la raison pour laquelle nous n'avons effectué que la moitié de cette multiplication matricielle.*

❧ On déduit alors du principe de superposition qu'une fonction y est solution de l'équation scalaire (E) sur $I =]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall\, t > 0, \qquad y(t) = \lambda t^2 + \frac{\mu}{t} + t^2\, \ell n\, t - \frac{t^3}{3}.$$

✍ *En prenant la peine d'écrire la forme générale du vecteur $\Lambda(t)$, on aurait obtenu la solution générale de (E) au lieu d'obtenir seulement une solution particulière.*

En effet, on déduit de l'expression de $\Lambda'(t)$ qu'il existe deux scalaires λ et μ tels que

$$\forall\, t \in I, \qquad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} \ell n\, t + \lambda \\ -t^3/3 + \mu \end{pmatrix}$$

et donc que

$$\forall\, t \in I, \qquad Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M(t)\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^2\, \ell n\, t - t^2/3 + \lambda t^2 + \mu/t \\ \star \end{pmatrix}.$$