On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1 + x. \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de 0.*

2. *Soit f, une solution de (E). Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = 0. \tag{H}$$

3. *Résoudre l'équation (H).*

4. *Déterminer les solutions de (E).*

Comme f est supposée continue sur $\mathbb{R}$, alors $[t \mapsto (x-t)f(t)]$ est continue sur le segment $[0 \leftrightarrow x]$ et l'intégrale est donc bien définie.

1. **Analyse —**
Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, t \in \left]-r, r\right[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

On en déduit que

$$\forall\, x, t \in \left]-r, r\right[, \quad (x-t)f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n.$$

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $r > 0$, les deux séries entières $\sum a_n x z^n$ et $\sum a_{n-1} z^n$ convergent normalement sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert $\left]-r, r\right[$ et en particulier sur le segment $[0 \leftrightarrow x]$, quel que soit $x \in \left]-r, r\right[$.

On peut donc intégrer terme à terme ces deux sommes entre 0 et x. On en déduit que

$$\forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En faisant les changements d'indice nécessaires pour regrouper les trois termes, on trouve que l'équation (E) équivaut à

$$\forall\, x \in \left]-r, r\right[, \quad a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(a_n + \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}\Big) x^n = 1 + x.$$

Comme $r > 0$ et que les deux membres sont des sommes de série entière, on peut identifier terme à terme :

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

✍ *La relation de récurrence entre les coefficients a_n nous conduit naturellement à discuter sur la parité des indices.*

On vérifie par récurrence que, d'une part,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} \qquad \text{et que, d'autre part,} \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}.$$

✍ *On reconnaît alors deux séries entières de référence !*

Donc $f(x) = \cos x + \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Synthèse —

Si $f = [t \mapsto \cos t + \sin t]$, alors f est développable en série entière et son rayon de convergence est égal à $+\infty$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= x\big[\sin x - \cos x + 1\big] - \int_0^x t(\cos t + \sin t)\,dt\\ &= x + x\sin x - x\cos x - \big[t(\sin t - \cos t)\big]_0^x + \int_0^x \sin t - \cos t\,dt\\ &= x + \big[1 - \cos x - \sin x\big] = 1 + x - f(x)\end{aligned}$$

donc f est bien solution de (E).

2. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation (E), alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt + 1 + x.$$

Comme f et $[t \mapsto tf(t)]$ sont continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$, les deux fonctions

$$\left[x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt\right] \qquad \text{et} \qquad \left[x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt\right]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Théorème fondamental), donc f est en fait de classe $\mathscr{C}^1$. Le Théorème fondamental nous dit aussi que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_0^x f(t)\,dt - x\cdot f(x) + xf(x) + 1 = 1 - \int_0^x f(t)\,dt. \tag{E'}$$

Cette expression nous apprend que f' est de classe $\mathscr{C}^1$ (donc que f est en fait de classe $\mathscr{C}^2$) et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f(x).$$

Donc toute solution de (E) est en fait une solution de (H).

3. On reconnaît l'équation du pendule harmonique avec $\omega = 1$, donc une fonction f est solution de l'équation (H) si, et seulement si, il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = A\cos x + B\sin x.$$

4. On déduit aussi de (E) que $f(0) + 0 = 1 + 0$ et de (E′) que $f'(0) = 1$. Par conséquent, $A = B = 1$. On a ainsi démontré que la seule solution de (E) était la fonction $[x \mapsto \cos x + \sin x]$.

✍ *L'équation (E) est une **équation intégrale** : une telle équation équivaut à la donnée d'une équation différentielle avec des contraintes supplémentaires. Dans le cas présent, ces contraintes supplémentaires conduisent à un problème de Cauchy et comme les conditions d'application du Théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites, on a trouvé une unique solution.*

✍ Toutes *les solutions de l'équation (E) sont développables en série entière.*