On considère l'équation différentielle suivante, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$$\forall\, t \in I, \quad tx'(t) + x(t) = e^t \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de (E) qui sont développable en série entière au voisinage de 0. Représenter graphiquement ces fonctions.*

2. *On considère une fonction f qui est solution de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Cette fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?*

3. *Résoudre l'équation (E) en discutant sur l'intervalle I.*

4. *On revient au cas particulier $I =]0, +\infty[$ et on ajoute à l'équation (E) la contrainte*

$$x(t_0) = x_0 \tag{CI}$$

où $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Que dit le Théorème de Cauchy-Lipschitz dans ce cas ? En déduire les solutions de (E) qui vérifient (CI).

1. On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, t \in]-r, r[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Comme $r > 0$, la fonction x est de classe $\mathscr{C}^1$ et dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc

$$\forall\, t \in]-r, r[, \quad tx'(t) + x(t) = t\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n t^n.$$

De plus, la fonction exp est développable en série entière avec un rayon de convergence infini. Par conséquent, la fonction x est une solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si,

$$\forall\, t \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n.$$

Comme $r > 0$, on peut identifier terme à terme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_n = 1/n!$$

et en déduire que $a_n = 1/(n+1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Réciproquement, il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum t^n/(n+1)!$ est infini et les calculs précédents prouvent bien que l'équation (E) possède une, et une seule, solution f_0 développable en série entière.

Comme on l'a vu, cette solution f_0 vérifie

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}$$

et donc

$$\forall\, t \neq 0, \quad f_0(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^t - 1}{t}.$$

❧ Pour tout $t \neq 0$, on en déduit que

$$f_0'(t) = \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2}.$$

L'étude des variations du numérateur $[t \mapsto 1 + (t-1)e^t]$ prouve qu'il atteint son minimum en $t = 0$. Comme ce minimum est nul, on en déduit que le numérateur est toujours strictement positif.

Comme f_0 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que la fonction f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

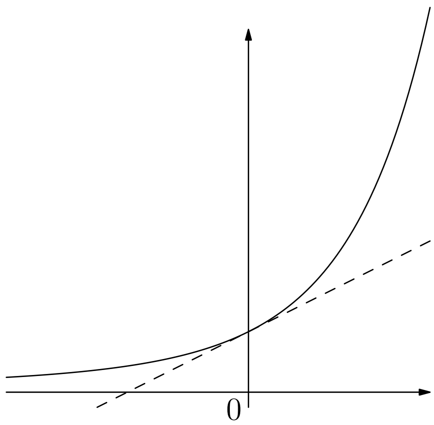
Il est clair que f_0 tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ (asymptote horizontale) et que $f_0(x)/x$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ (branche parabolique verticale).

Le développement en série entière prouve aussi que $f_0(t) = 1 + t/2 + t^2/6 + o(t^2)$ au voisinage de $t = 0$. La tangente au point d'abscisse $t = 0$ est donc la droite d'équation $x = 1 + t/2$ et, au voisinage de $t = 0$, la fonction f_0 est au-dessus de cette tangente.

✍ *Si on est plus curieux, on peut aussi calculer la dérivée seconde :*

$$\forall\, t \neq 0, \quad f_0''(t) = \frac{(t^2 - 2t + 2)e^t - 2}{t^3}$$

Comme précédemment, l'étude des variations du numérateur prouve que celui-ci atteint son minimum en $t = 0$ et que ce minimum est nul. Par conséquent, f_0 est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}$.



2. L'équation différentielle homogène (H) associée à (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans singularité sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc l'ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle.

D'après le principe de superposition, une fonction f est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, il existe une solution h de (H) telle que $f = f_0 + h$.

Il y a donc une infinité de solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, alors qu'il n'existe qu'une seule solution développable en série entière au voisinage de 0. Donc il existe des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ qui ne sont pas développables en série entière.

3. Pour appliquer la théorie de Cauchy-Lipschitz à l'équation différentielle (E), il faut l'écrire sous forme canonique :

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) = A(t)x(t) + B(t) = \frac{-1}{t}x(t) + \frac{e^t}{t}$$

et que les deux fonctions A et B soient <u>continues</u> sur l'<u>intervalle</u> I. Par conséquent, l'intervalle I ne doit pas contenir 0.

❧ Si $I_+ \subset]0, +\infty[$, alors on vérifie sans peine que les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme $[t \mapsto a/t]$. La fonction f_0 nous donne une solution particulière de (E), donc une fonction f est solution de (E) sur I_+ si, et seulement si, il existe $C_+ \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \in I_+, \qquad f(t) = \frac{C_+}{t} + \frac{e^t - 1}{t}.$$

❧ De même, une fonction f est solution de (E) sur l'intervalle $I_- \subset]-\infty, 0[$ si, et seulement si, il existe $C_- \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, t \in I_-, \qquad f(t) = \frac{C_-}{t} + \frac{e^t - 1}{t}.$$

❧ Considérons maintenant une fonction f qui soit solution de (E) sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a < 0 < b$. D'après ce qui précède, il existe deux réels C_- et C_+ tels que

$$\forall\, a < t < 0, \quad f(t) = \frac{C_-}{t} + f_0(t) \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 < t < b, \quad f(t) = \frac{C_+}{t} + f_0(t).$$

Comme f_0 est continue en 0 (et même développable en série entière) et que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$, il faut que $C_- = C_+ = 0$.

✍ *Sinon, la fonction f admet une limite infinie à gauche et/ou à droite de 0 ! NB : le signe de cette limite dépend du signe de la constante C.*

Par conséquent, la fonction f_0 est la seule solution de (E) sur un intervalle I qui contient 0.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Comme on l'a vu, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme

$$\forall\, t \in I, \qquad x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$$

où A et B sont deux fonctions continues sur I. On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz : quel que soit $t_0 \in I$ (c'est-à-dire $t_0 > 0$) et quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une, et une seule f qui vérifie l'équation (E) sur l'intervalle I <u>et</u> telle que $f(t_0) = x_0$.

❧ D'après l'expression de la solution générale, la contrainte (CI) se traduit par

$$\frac{C_+}{t_0} + \frac{e^{t_0}}{t_0} = x_0.$$

Donc l'unique solution du problème de Cauchy (E)+(CI) a pour expression

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{t_0}{t} \cdot x_0 + \frac{e^t - e^{t_0}}{t}.$$