> *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, *une application continue de période* $T > 0$. *Démontrer qu'il existe un nombre complexe* $\lambda \neq 0$ *et une application* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et non identiquement nulle telle que*
>
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \textit{et} \quad X(t+T) = X(t).$$

Comme A est une application continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, on déduit de la Théorie de Cauchy-Lipschitz que l'ensemble S_H des solutions $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A(t)X(t)$$

est un espace vectoriel de dimension n.

❧ Soit $X \in S_H$ et posons

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(X)(t) = X(t+T).$$

Il est clair que $\Phi(X)$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}^n$. De plus, comme A est périodique de période T,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad [\Phi(X)]'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)[\Phi(X)](t),$$

ce qui prouve que $\Phi(X) \in S_H$.

❧ On vérifie sans peine que Φ est une application linéaire.

Ainsi, Φ est un endomorphisme de S_H, espace vectoriel complexe de dimension finie, donc Φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X_\lambda \in S_H$, non identiquement nulle (un valeur propre n'est jamais nul).

Enfin, par définition de Φ,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t+T) = \lambda X_\lambda(t).$$

Si la valeur propre λ était nulle, on pourrait en déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X_\lambda(t) = \lambda X_\lambda(t-T) = 0,$$

ce qui est absurde puisque X_λ est un **vecteur propre**.