On considère l'équation différentielle suivante.

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x) \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E) qui sont de la forme $y(x) = x^\alpha$.*

2. *En déduire les solutions de (E) sur $I_+ =]0, +\infty[$ et sur $I_- =]-\infty, 0[$.*

3. *L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?*

1. Après injection de $y(x) = x^\alpha$ dans (H), on simplifie et finalement on cherche les réels α tels que

$$\forall\, x > 0, \qquad (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x^\alpha = 0.$$

Les seules solutions sont $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Réciproquement, il est clair que toute fonction polynomiale de la forme $\left[x \mapsto ax + bx^2\right]$ est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ (et non pas seulement sur $]0, +\infty[$).

2. ❧ **Réduction à la forme canonique —**

Sur un intervalle I exempt de singularité, l'équation différentielle (E) peut s'écrire sous la forme canonique

$$\forall\, x \in I, \qquad Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \tag{C}$$

avec

$$A(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ -2 & 2x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2+2x \end{pmatrix}$$

et une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) (resp. de (H)) si, et seulement si, la fonction

$$Y = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\right] \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$$

est solution de (C) (resp. de l'équation homogène (C_h) associée à (C)).

❧ Sur les intervalles $I_- =]-\infty, 0[$ et $I_+ =]0, +\infty[$, les deux fonctions A et B sont continues. Dans ces conditions, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) sur un intervalle I contenu dans I_- **ou** dans I_+ est un plan vectoriel.

❧ D'après la question précédente, les applications F_1 et F_2 définies par

$$F_1 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{et} \quad F_2 = \left[x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}\right]$$

sont deux solutions non proportionnelles de l'équation homogène (C_h), donc le couple (F_1, F_2) est une base du plan des solutions de (C_h).

Par conséquent, la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $x \in I$ et on peut trouver une solution particulière de l'équation (C) sous la forme $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ où $\Lambda \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ (*méthode de variation des constantes*).

❧ On vérifie sans peine que $Y(x) = M(x)\Lambda(x)$ est solution de (C) sur l'intervalle I si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \qquad M(x)\Lambda'(x) = B(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in I, \qquad \Lambda'(x) = \frac{2}{x^3}\begin{pmatrix} -x - x^2 \\ 1 + x \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2x - 2x^2 \ln|x| \\ -1 - 2x \end{pmatrix},$$

on en déduit qu'une solution particulière de (C) sur I_+ est donnée par

$$Y(x) = M(x)\Lambda(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ \star & \star \end{pmatrix}\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 - 2x\ln|x| - 2x \\ \star \end{pmatrix}.$$

✍ *Comme, par définition,*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

et qu'on s'intéresse essentiellement à y, il est inutile d'effectuer les calculs sur la deuxième ligne.

❧ Une solution particulière de (E) est donc donnée par

$$\forall\, x \in I, \qquad y_0(x) = 1 - 2x\,\ell n|x|.$$

✍ *On peut supprimer le terme $-2x$, puisqu'il s'agit d'une solution de l'équation homogène (H) !*

D'après le principe de superposition, pour $I = I_-$ et pour $I = I_+$, une fonction $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in I, \qquad y(x) = [ax + bx^2] + [1 - 2x\,\ell n|x|].$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe des réels a_-, b_-, a_+ et b_+ tels que

$$\forall x < 0, \quad f(x) = a_-x + b_-x^2 + 1 - 2x\,\ell n\, x \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0, \quad f(x) = a_+x + b_+x^2 + 1 - 2x\,\ell n|x|.$$

Quels que soient les réels a_-, b_-, a_+ et b_+, le raccord en $x = 0$ est continu (limite nulle à gauche et à droite de 0) mais n'est pas dérivable en $x = 0$ (tangente verticale).

L'équation (E) n'admet donc pas de solution sur $\mathbb{R}$.