On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x)+(1-3x)y'(x)-y(x)=0 \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E) *développables en série entière.*

2. *Résoudre* (E) *sur un intervalle* I *sans singularité.*

3. *Peut-on raccorder les solutions de part et d'autre d'une singularité ?*

1. Soit y, une fonction développable en série entière : il existe un réel $r>0$ et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, x\in\,]-r,r[\,,\quad y(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k.$$

Comme $r>0$, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et (indéfiniment) dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert $]-r,r[$, donc

$$\forall\, x\in\,]-r,r[\,,\quad y'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k,\qquad 3xy'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}3ka_kx^k,$$
$$xy''(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k,\qquad x^2y''(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)a_kx^k.$$

✍ *Il faut d'abord effectuer tous les changements d'indice nécessaire pour obtenir des sommes dont le terme général est* toujours *de la forme* b_kx^k.

Il faut ensuite penser à ajouter, autant que possible, de termes nuls pour que les index des différentes sommes soient analogues, voire, dans le meilleur des cas, égaux.

Par conséquent, pour tout $x\in\,]-r,r[$, l'expression $x(1-x)y''(x)+(1-3x)y'(x)-y(x)$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)a_kx^k+\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{+\infty}3ka_kx^k+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k.$$

Après simplification, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall\, x\in\,]-r,r[\,,\quad \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)x^k=0.$$

Comme $r>0$ et que les deux membres de l'égalité sont développables en série entière, on peut identifier les deux sommes terme à terme :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\qquad a_{k+1}=a_k.$$

On a ainsi démontré que toute solution développable en série entière de (E) est proportionnelle à la fonction $[x\mapsto {}^1\!/_{1-x}]$.

✍ *On a raisonné par condition nécessaire en commençant par* ***supposer*** *que* y *était une solution développable en série entière.*

Il faut maintenant vérifier que les fonctions trouvées (qui sont les seules possibles*) sont effectivement des solutions de* (E).

Au lieu de raisonner sur la série entière (ce qui nous obligerait à rester sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$*), nous allons calculer sur la somme et donc sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

❧ Réciproquement, avec

$$f_1(x)=\frac{1}{1-x},\qquad \text{on a}\qquad f_1'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\quad\text{et}\quad f_1''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit facilement que f_1 est solution de (E) sur les deux intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

✍ *L'équation différentielle homogène* (E) *peut être écrite sous la forme canonique*

$$\forall\, x \in I, \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{C}$$

avec

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{(1-x)x}\begin{pmatrix} 0 & (1-x)x \\ 1 & 3x-1 \end{pmatrix}.$$

L'application A *est continue sur les trois intervalles* $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ *et* $I_3 =]1, +\infty[$. *On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz sur ces trois intervalles (et sur tout sous-intervalle d'un de ces trois intervalles).*

On en déduit que, pour $k \in [\![1, 3]\!]$, *pour tout instant* $x_k \in I_k$ *et toute "position initiale"* $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une, et une seule, solution* $Y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ *de l'équation canonique* (C) *sur l'intervalle* I_k *telle que* $Y(x_k) = (y_k, v_k)$.

En remarquant que y *est solution de* (E) *sur* I *si, et seulement si,* Y *est solution de* (C) *sur* I, *on peut reformuler les conséquences du Théorème de Cauchy-Lipschitz : pour* $k \in [\![1; 3]\!]$, *pour tout instant* $x_k \in I_k$ *et pour tout couple* $(y_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une, et une seule, solution* $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ *de l'équation* (E) *sur l'intervalle* I_k *telle que*

$$y(x_k) = y_k \quad \text{et} \quad y'(x_k) = v_k.$$

Quelle que soit la formulation (canonique ou non), l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et pour l'instant, les solutions que nous avons trouvées sont toutes proportionnelles à f_1 — nous étudions un plan et nous n'en connaissons qu'une droite.

2. La théorie de Cauchy nous assure que l'ensemble des solutions de (E) sur I_1 (resp. sur I_2, resp. sur I_3) est un plan vectoriel. Nous connaissons un vecteur $f_1 \neq 0$ de ce plan et nous allons chercher un second vecteur de ce plan, non proportionnel au premier, en faisant varier la constante.

✍ *Comme c'est le cas la plupart du temps, les calculs de dérivées et de primitives sont les mêmes sur les trois intervalles* I_1, I_2 *et* I_3. *Nous allons donc rédiger la résolution sur un intervalle* I_k *indéterminé.*

Nous cherchons donc une fonction $a \in \mathscr{C}^2(I_k, \mathbb{R})$ telle que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto a(x)f_1(x) = \frac{a(x)}{1-x}\right]$$

soit une solution de (E) sur I_k. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in I_k, \quad f_2'(x) &= a'(x) \cdot f_1(x) + a(x) \cdot f_1'(x), \\ f_2''(x) &= a''(x) \cdot f_1(x) + 2a'(x)f_1'(x) + a(x)f_1''(x). \end{aligned}$$

✍ *On aura bien sûr pensé à utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée seconde !*

✍ *On injecte ensuite ces expressions dans* (E) *en regroupant les termes en facteur de* $a(x)$, *de* $a'(x)$ *et de* $a''(x)$. *On peut se dispenser de calculer le cofacteur de* $a(x)$, *puisqu'il est nul : par définition, la fonction* f_1 *est une solution de* (E) *!*

Ainsi,

$$\forall\, x \in I_k, \quad \left[\frac{a''(x)}{1-x} + \frac{2xa'(x)}{(1-x)^2}\right] + \frac{2a''(x)}{(1-x)^3} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\forall\, x \in I_k, \quad xa''(x) + a'(x) = 0.$$

✍ *Il ne s'agit pas vraiment d'une équation du second ordre, mais d'une équation du premier ordre en* a'. ***Il en va toujours ainsi lorsqu'on applique la méthode de variation de la constante.***

On en déduit tout d'abord que $a'(x)$ est proportionnelle à $1/x$, puis que la fonction

$$f_2 = \left[x \mapsto \frac{\ln|x|}{1-x}\right]$$

est une solution de (E) sur I_k.

❧ En conclusion, pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, une fonction y est solution de (E) sur l'intervalle I_k si, et seulement si, il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$\forall\, x \in I_k, \quad y(x) = a_k \cdot \frac{1}{1-x} + b_k \cdot \frac{\ln|x|}{1-x}.$$

✍ *Il est clair que la fonction f_2 n'est pas développable en série entière au voisinage de l'origine (limite infinie en $x = 0$!). C'est pourquoi toutes les solutions développables en série entière sont proportionnelles à f_1.*

3. Si y est une solution de (E) autour de $x = 0$, alors il existe des réels a_1, b_1, a_2 et b_2 tels que

$$\forall\, x < 0, \quad y(x) = \frac{a_1 + b_1 \ln|x|}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x}.$$

Comme $\ln|x|$ tend vers 0 au voisinage de 0, il faut que $b_1 = b_2 = 0$ pour que y soit bornée au voisinage de 0. Il faut de plus que $a_1 = a_2$ pour que y soit continue en 0.

Réciproquement, on sait déjà que la fonction f_1 est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

❧ Si y est une solution de (E) autour de $x = 1$, alors il existe des réels a_2, b_2, a_3 et b_3 tels que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad y(x) = \frac{a_2 + b_2 \ln x}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall\, x > 1, \quad y(x) = \frac{a_3 + b_3 \ln x}{1-x}.$$

On sait que $\ln x \sim (x-1)$ pour x voisin de 1, donc

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{a_k}{1-x} - b_k + o(1).$$

Pour que y soit continue en 1, il faut donc que $a_2 = a_3 = 0$ et que $b_2 = b_3$.

Réciproquement, la fonction f_2 est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I_2 \cup I_3$. En posant $f_2(1) = -1$, on définit un prolongement de f_2 qui est même développable en série entière au voisinage de 1 : comme

$$\forall\, h \in\,]-1, 1[\, \setminus \{0\}, \quad \frac{\ln(1+h)}{-h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1},$$

on a

$$f_2(x) = f_2\big(1 + (x-1)\big) \underset{x\to 1}{=} -1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} + \mathcal{O}\big((x-1)^3\big).$$

Cela nous montre que $f_2'(1) = 1/2$ et donc que la fonction f_2 ainsi prolongée vérifie (E) pour $x = 1$ également.

✍ *La formule de Taylor donne le développement en série entière et le développement limité de f_2 : inutile de se fatiguer pour calculer un développement limité si on connaît un développement en série entière !*

❧ Enfin, les discussions précédentes montrent que la seule solution de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ est la fonction nulle.