> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *une matrice diagonalisable telle que* $\operatorname{tr} A > 0$. *On suppose qu'il existe une fonction* $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *telle que*
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \quad \textit{et que} \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$
> *Démontrer qu'il existe une forme linéaire* $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *non nulle telle que*
> $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$

Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants nous montre que les solutions du système homogène $x'(t) = Ax(t)$ sont les applications $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \exp(tA)\big(x(0)\big).$$

❧ Comme la matrice A est diagonalisable, l'espace $\mathbb{R}^n$ est la somme (directe, forcément directe) des sous-espaces propres de A :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}(A - \alpha I_n).$$

En notant $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A, il existe une, et une seule, famille de vecteurs $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ telle que

$$x(0) = \sum_{k=1}^{r} u_k \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad u_k \in \operatorname{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \sum_{k=1}^{r} \exp(tA)(u_k) = \sum_{k=1}^{r} e^{t\alpha_k} \cdot u_k. \tag{‡}$$

✍ *Il faut bien distinguer l'application* $\exp = [M \mapsto \exp(M)]$ *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *qui est développable en série entière, et l'application* $\exp(M) = [x \mapsto \exp(M)x]$, *qui est linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *puisque* $\exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Avec* $Mu = \alpha \cdot u$, *on a* $M^k u = \alpha^k \cdot u$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et donc*

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \qquad \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\Big)(u) = \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!}\Big) \cdot u$$

Par définition de $\exp(M)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \Big|\Big|\Big| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \Big|\Big|\Big| = 0$$

et par définition de $|||\cdot|||$,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \Big\| \exp(M)(u) - \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!}\Big)(u) \Big\| \leqslant \Big|\Big|\Big| \exp(M) - \sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} \Big|\Big|\Big| \, \|u\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \Big\| \exp(M)(u) - \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha^k}{k!}\Big) \cdot u \Big\| = 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \exp(M)(u) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\Big) \cdot u = e^{\alpha} \cdot u.$$

❧ Supposons que les valeurs propres de A soient indexées de manière décroissante :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r.$$

De plus, la trace de A est égale à la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité). Comme cette trace est strictement positive, la matrice A admet au moins une valeur propre *strictement positive*, donc $\alpha_1 > 0$.

On déduit de la décomposition (‡) que

$$u_1 = e^{-t\alpha_1} x(t) - \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \cdot u_k$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \|u_1\| \leqslant e^{-t\alpha_1} \big\|x(t)\big\| + \sum_{k=2}^{r} e^{t(\alpha_k - \alpha_1)} \|u_k\|.$$

Comme $x(t)$ tend vers le vecteur nul et que $(\alpha_k - \alpha_1) < 0$ pour tout $k \geqslant 2$, on en déduit que le second membre tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\|u_1\| = 0$ et u_1 est le vecteur nul.

✍ *On pourrait continuer sur cette lancée et en déduire (par récurrence finie) que $u_k = 0$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant r$ tel que $\alpha_k \geqslant 0$.*

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathrm{Vect}(u_2, \ldots, u_r) \subset \bigoplus_{k=2}^{r} \mathrm{Ker}(A - \alpha_k I_n).$$

Par définition, la dimension d'un sous-espace propre est toujours au moins égale à 1, donc

$$\dim \bigoplus_{k=2}^{r} \mathrm{Ker}(A - \alpha_k I_n) = \sum_{k=2}^{r} \dim \mathrm{Ker}(A - \alpha_k I_n) < \dim E.$$

D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un hyperplan H de E tel que

$$\bigoplus_{k=2}^{r} \mathrm{Ker}(A - \alpha_k I_n) \subset H$$

et donc tel que $x(t) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc il existe une forme linéaire ℓ, non identiquement nulle, telle que $H = \mathrm{Ker}\,\ell$ et donc telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \ell\big(x(t)\big) = 0.$$