1. *On considère l'équation différentielle*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = Ax(t) \tag{H}$$

où $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
Démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* A *si, et seulement si, il existe un vecteur* non nul $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ *tel que la fonction*

$$f_\lambda = \left[t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda\right]$$

soit une solution de l'équation (H).

2. *Pour* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*, on pose*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}$$

et $F = \{f_{a,b,c},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

2. a. *Démontrer que* F *est un espace vectoriel. Préciser sa dimension.*

2. b. *Déterminer une matrice* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall\, f \in F,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = Mf(t).$$

Quel est le spectre de M *?*

1. Quels que soient le réel a et le vecteur $x \in \mathbb{R}^3$,il est clair que la fonction $f = [t \mapsto e^{at}x]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = ae^{at}x.$$

❧ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de la matrice A. Il existe donc un vecteur propre $x_\lambda \in \mathbb{R}^3$ de A associé à λ et, par définition, ce vecteur n'est pas nul.

La fonction $f_\lambda = \left[t \mapsto e^{\lambda t} x_\lambda\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t} x_\lambda = e^{\lambda t} \cdot Ax_\lambda = A \cdot f_\lambda(t).$$

❧ Réciproquement, si f_λ est une solution de (H), alors en particulier

$$\lambda \cdot x_\lambda = \lambda e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda = f'_\lambda(0) = Af_\lambda(0) = A \cdot (e^{\lambda \times 0} \cdot x_\lambda) = Ax_\lambda$$

et comme le vecteur x_λ est supposé non nul, on en déduit qu'il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

2. a. Comme

$$f_{a,b,c}(t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que F est le sous-espace de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$ et $f_{0,0,1}$. C'est donc un espace vectoriel et sa dimension est inférieure à 3.

On peut rapidement vérifier que le rang de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3, donc cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs $f_{1,0,0}(0)$, $f_{0,1,0}(0)$ et $f_{0,0,1}(0)$ sont linéairement indépendants et donc que la famille $(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$ est une base de F et $\dim F = 3$.

✍ *Si trois fonctions* f*,* g *et* h *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *forment une famille liée, alors il existe un triplet de scalaires* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *tel que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad af(t) + bg(t) + ch(t) = 0$$

et en particulier $af(0) + bg(0) + ch(0) = 0$*, ce qui prouve que les trois vecteurs* $f(0)$*,* $g(0)$ *et* $h(0)$ *forment une famille liée (puisque les trois scalaires* a*,* b*,* c *ne sont pas tous nuls).*

$\boxed{\textbf{2. b.}}$ Quels que soient a, b, c et t,

$$f'_{a,b,c}(t) = be^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - ce^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation $f'(t) = Mf(t)$ est vérifiée pour toute fonction $f \in F$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour les trois fonctions $f_{1,0,0}$, $f_{0,1,0}$, $f_{0,0,1}$ (qui constituent une sorte de base canonique de F). On cherche donc une matrice M telle que

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{†}$$

On obtient rapidement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la seule matrice qui convienne.

❧ En remarquant que l'équation (†) peut aussi s'écrire

$$MP = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$M = P\,\mathrm{Diag}(0, 1, -1)P^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) = \{0, -1, 1\}$.

✍ *Le cours sur les systèmes différentiels à coefficients constants montre que les solutions de l'équation $x'(t) = Mx(t)$ sont les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$ de la forme*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tM).f(0).$$

Ici,

$$f_{a,b,c}(0) = \begin{pmatrix} b+c \\ 2a-b \\ a+c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} a \\ be^t \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$f_{a,b,c}(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} f_{a,b,c}(0)$$

et comme cette propriété est vraie pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tM) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} &= P \exp\big[\mathrm{Diag}(0, t, -t)\big] P^{-1} \\ &= \exp\big[tP\,\mathrm{Diag}(0, 1, -1)P^{-1}\big] \end{aligned}$$

(puisque $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}\exp(A)Q$, quelles que soient la matrice A et la matrice inversible Q).
***NB :** L'application* exp *n'est pas injective sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*