1. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A *est diagonalisable en explicitant une matrice inversible* P *et une matrice diagonale* D *telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

2. *On considère le système différentiel suivant.*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \tag{S_1}$$

Démontrer que $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ *est une solution de* (S_1) *si, et seulement si,* $U = P^{-1}X$ *est une solution du système différentiel*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = DY(t). \tag{Δ_1}$$

En déduire les solutions de (S_1).

3. *On considère le système différentiel suivant.*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X''(t) = AX(t) \tag{S_2}$$

3. a. *Résoudre le système* (S_2).

3. b. *Soit* E, *l'ensemble des solutions bornées sur* $\mathbb{R}$ *de* (S_2). *Démontrer que* E *est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

1. On vérifie facilement que le polynôme caractéristique de A est $(X+1)(X-2)(X-3)$.

✍ *Il faut manifestement développer par la troisième colonne !*

Une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ admettant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A + I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 3I_3)$$

et les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Par conséquent, il suffit de trouver un vecteur non nul dans chacun de ces trois droites pour en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres.

✍ *Si on connaît une décomposition en somme directe* $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, *alors il suffit de connaître une base de chaque sous-espace* V_k *pour en déduire par concaténation une base de* E.

On écrit les trois matrices

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (4, -2, -1), \quad \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, -1), \quad \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1).$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible et $P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(-1, 2, 3)$.

2. Comme la matrice P est inversible et constante (indépendante de t), le produit $U = P^{-1}X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, la fonction $X = PU$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U'(t) = P^{-1}X'(t).$$

✍ *Comme la matrice* P^{-1} *est constante, les composantes de la colonne* $U(t)$ *sont en fait des combinaisons linéaires des composantes de la colonne* $X(t)$ *(et réciproquement). On applique donc la règle pour calculer la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions dérivables.*

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) && \text{(multiplication à gauche par } P^{-1}\text{)} \\ &\iff U'(t) = P^{-1}AP \cdot P^{-1}X(t) && \text{(astuce taupinale)} \\ &\iff U'(t) = D.U(t). \end{aligned}$$

❧ Comme la matrice D est diagonale, le système (Δ_1) revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u'(t) = -u(t), \qquad v'(t) = 2v(t), \qquad w'(t) = 3w(t).$$

Donc U est solution de (Δ_1) si, et seulement si, il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) = \left(K_1 e^{-t},\ K_2 e^{2t},\ K_3 e^{3t}\right)$$

et finalement une fonction $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est solution de (S_1) si, et seulement si, il existe $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✍ *Je ne suis pas convaincu de la nécessité d'effectuer ce produit matriciel, car je ne vois pas en quoi l'expression développée*

$$F(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_2 e^{2t} \\ -2K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-t} \\ -K_1 e^{-t} - K_2 e^{2t} + K_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

est plus claire ou plus utile que l'expression factorisée ci-dessus.

J'irais même jusqu'à préférer une expression complètement factorisée (en notant $\Lambda = (K_1, K_2, K_3)$*) :*

$$F(t) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = P \cdot \exp(tD) \cdot \Lambda$$

afin de faire apparaître $\exp(tA)$ *:*

$$F(t) = P \cdot \exp\left[t(P^{-1}AP)\right] \cdot \Lambda = P \cdot \left[P^{-1} \cdot \exp(tA) \cdot P\right] \cdot \Lambda = \exp(tA) \cdot P\Lambda.$$

On comprend ici que $P\Lambda = F(0)$.

✍ *Si on choisit une autre base de vecteurs propres (et pourquoi pas ?), on obtiendra une expression analogue de* $X(t)$*, mais les constantes d'intégration* K_i *seront différentes :*

$$F(t) = \exp(tA) \cdot P_1\Lambda_1 = \exp(tA) \cdot P_2\Lambda_2.$$

Cela dit, si on impose une condition initiale $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, on doit trouver la même solution, quelle que soit la base de vecteurs propres choisie ! En effet, la condition initiale* $F(t_0) = X_0$ *se traduit par*

$$P_1 \cdot \Lambda_1 = P_2 \cdot \Lambda_2 = \exp(-t_0 A) X_0.$$

Ce n'est donc pas P*, ni* Λ *qui compte, mais uniquement le produit* $P\Lambda$.

3. a. Comme plus haut, on résout (S_2) en se ramenant au système découplé

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U''(t) = DU(t) \tag{Δ_2}$$

qui revient à résoudre trois équations différentielles indépendantes :

$$u''(t) + u(t) = 0, \qquad v''(t) - 2v(t) = 0, \qquad w''(t) - 3w(t) = 0.$$

Par conséquent, une fonction $U \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de (Δ_2) si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 et B_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) = \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

et, comme précédemment, une fonction $F \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ est solution de (S_2) si, et seulement si, il existe six constantes d'intégration A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 et B_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ A_2 \exp(\sqrt{2}t) + B_2 \exp(-\sqrt{2}t) \\ A_3 \exp(\sqrt{3}t) + B_3 \exp(-\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

3. b. Considérons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^3$ et la norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur l'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

✍ *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc la norme choisie importe peu.*

En particulier, la norme choisie est équivalente à la norme produit pour laquelle une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ est bornée si, et seulement si, ses trois composantes sont bornées.

Le système différentiel (S_2) est un système différentiel linéaire et homogène du second ordre, donc l'ensemble $\mathcal{S}_2$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

L'ensemble E est l'intersection du sous-espace $\mathcal{S}_2$ avec l'ensemble $\mathscr{C}^2_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ des applications bornées de classe $\mathscr{C}^2$, qui est un sous-espace "bien connu" de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Donc E est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

❧ Par définition, $U(t) = P^{-1}X(t)$ et donc $X(t) = PU(t)$. Comme la norme subordonnée est sous-multiplicative,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big\|U(t)\big\| \leqslant |||P^{-1}|||\, \big\|X(t)\big\| \quad \text{et} \quad \big\|X(t)\big\| \leqslant |||P|||\, \big\|U(t)\big\|.$$

Comme $|||P^{-1}|||$ et $|||P|||$ sont des facteurs indépendants de t, on en déduit que la fonction X est bornée si, et seulement si, la fonction U est bornée.

Comme $e^{\alpha t}$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\alpha > 0$ (resp. au voisinage de $-\infty$ lorsque $\alpha < 0$), la fonction U est bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les constantes A_2, A_3, B_2 et B_3 sont nulles.

Ainsi, une fonction $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ est une solution de (S_2) qui reste bornée sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe deux réels A_1 et B_1 tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = P \begin{pmatrix} A_1 \cos t + B_1 \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la dimension du sous-espace E des solutions bornées sur $\mathbb{R}$ est égale à 2.