On considère l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t \in \ I =]0, +\infty[, \quad t^2x''(t) + tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t} + t \tag{E}$$

1. *Que prévoit le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation* (E) *?*

2. *Soient* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *et* $g = [x \mapsto f(e^x)]$. *Démontrer que* f *est solution de* (E) *sur* I *si, et seulement si,* g *est solution sur* $\mathbb{R}$ *d'une équation différentielle du second ordre (qu'on déterminera).*

3. *Résoudre l'équation* (E).

1. Sur l'intervalle I, l'équation (E) peut être mise sous la forme canonique

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{C}$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{1}{t^3}\begin{pmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$$

où les deux applications $A : I \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^2$ sont continues car $0 \notin I$.

Par conséquent, pour toute condition initiale $\big(t_0, (x_0, v_0)\big) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une, et une seule, solution F de (C) sur I telle que $F(t_0) = (x_0, v_0)$.

Comme $x \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, $X = (x, x') \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ est solution de (C), on en déduit que, pour tout triplet $(t_0, x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une, et une seule, solution f de (E) sur I telle que $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

2. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et que

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \ I \ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \longmapsto g(x) = f(e^x) \end{array}$$

l'application g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x).$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) + g(x) = (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $t = e^x$ appartient à l'intervalle I et comme f est une solution de (E), alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) + e^x f'(e^x) + f(e^x) = \frac{1}{e^x} + e^x = 2\operatorname{ch} x.$$

La fonction g est donc une solution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}. \tag{E_0}$$

✍ *On a raisonné par condition nécessaire ("si* f *est solution de* (E)*, alors* g *est solution de* (E_0)*"), il faudra étudier la réciproque à un moment ou un autre. Il n'est pas utile d'attendre !*

Le changement de variable $t = e^x$ *peut aussi s'écrire* $x = \ell n\, t$*, c'est donc aussi une bijection de classe* $\mathscr{C}^2$ *de* I *dans* $\mathbb{R}$*. De ce fait, en reprenant les calculs qui viennent d'être faits : si* $g(x)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *qui vérifie l'équation* (E_0) *sur* $\mathbb{R}$*, alors* $f(t) = g(\ell n\, t)$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^2$ *qui vérifie l'équation* (E) *sur* I*.*

3. On reconnaît l'équation du pendule harmonique. Donc une fonction $y_0 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de l'équation homogène associée à (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = a\cos x + b\sin x.$$

L'équation $y''(x) + y(x) = e^x$ admet une solution particulière de la forme $y_1(x) = be^x$. Après substitution et simplification, on trouve que $b = 1/2$.

De même, l'équation $y''(x) + y(x) = e^{-x}$ admet une solution particulière de la forme $y_2(x) = ce^{-x}$. On trouve que $c = 1/2$.

Finalement, une fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = a\cos x + b\sin x + \operatorname{ch} x.$$

❧ On a justifié plus haut qu'on pouvait en déduire les solutions de (E) : une fonction $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = a\cos \ell n\, t + b\sin \ell n\, t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}.$$