

## Composition de Mathématiques

Le 9 novembre 2016 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.  
Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.**

### ❖ I – Problème ❖

On étudie les groupes de matrices, c'est-à-dire les parties de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont munies d'une structure de groupe pour la multiplication matricielle — sans être nécessairement des sous-groupes du groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{R})$ .

1. Démontrer que chacune des parties suivantes de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est un groupe multiplicatif.

1.a. L'ensemble  $E_1$  est le singleton constitué de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b. Pour un entier  $0 < r < n$ , l'ensemble  $E_2$  est constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où  $A$  décrit  $GL_r(\mathbb{R})$ .

1.c. On note  $J$ , la matrice de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. L'ensemble  $E_3$  est défini par

$$A \in E_3 \iff \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \quad A = kJ.$$

2. Soit  $(G, \times)$ , un groupe de matrices.

2.a. Démontrer que la matrice unité  $1_G$  est une matrice de projection.

2.b. Démontrer que

$$\forall A \in G, \quad \text{Im } A = \text{Im } 1_G.$$

3. Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices semblables dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . S'il existe un groupe de matrices  $(G, \times)$  qui contient  $A$ , alors il existe un groupe de matrices  $(H, \times)$  qui contient  $B$  et qui est isomorphe à  $(G, \times)$ .

### ❖ II – Problème ❖

On fixe un entier  $N \geq 2$ . Pour toute matrice colonne  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , on pose

$$|V| = (|v_i|)_{1 \leq i \leq N} \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|V\|_1 = \sum_{i=1}^N |v_i|.$$

• Un vecteur  $V \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  est **invariant** par la matrice  $Q \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  lorsque  $QV = V$ .

• Une matrice est dite **positive** lorsque tous ses coefficients sont des nombres réels positifs et **strictement positive** lorsque tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.

Un **vecteur de probabilité** est une matrice colonne positive  $V \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  telle que  $\|V\|_1 = 1$ .

Une **matrice stochastique** est une matrice carrée positive  $Q = (Q(i, j))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad \sum_{i=1}^N Q(i, j) = 1.$$

• Quels que soient les entiers  $p$  et  $q$ , une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices appartenant à  $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  **converge vers la matrice**  $A_\infty \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  lorsque

$$\forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq q, \quad A_\infty(i, j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(i, j).$$

#### Partie A. Préliminaires

1. Soit  $V \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ .

1.a. Vérifier que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda V\|_1 = |\lambda| \|V\|_1.$$

1.b. Démontrer que : si  $\|V\|_1 = 0$ , alors  $V$  est le vecteur nul. Que peut-on en déduire si  $V$  est vecteur propre d'une matrice  $Q \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  ?

2.a. Démontrer qu'une matrice  $Q \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  est stochastique si, et seulement si,  $QV$  est un vecteur de probabilité pour tout vecteur de probabilité  $V \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ .

2.b. En déduire que, si les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $\mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  sont stochastiques, alors le produit  $Q_1 Q_2$  est une matrice stochastique.

3. Soit  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de matrices de  $\mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$  qui converge vers  $Q_\infty \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$ .

3.a. Démontrer que : quelles que soient les matrices  $A \in \mathfrak{M}_{p,N}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathfrak{M}_{N,p}(\mathbb{R})$ , les suites  $(AQ_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Q_n B)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $AQ_\infty$  et  $Q_\infty B$ . Préciser les tailles respectives des matrices  $AQ_\infty$  et  $Q_\infty B$ .

3.b. Démontrer que : si toutes les matrices  $Q_n$  sont stochastiques, alors la matrice  $Q_\infty$  est stochastique.

**Partie B. Google et l'algorithme PageRank**

Le moteur de recherche Google repose sur la notion de *PageRank*, indice mesurant la notoriété de chaque page web référencées.

On suppose que les pages référencées sont numérotées de 1 à  $N$  (ce qui signifie que  $N$  est au moins de l'ordre de  $10^{10}$  ...) et on dit que la page  $j$  **pointe vers** la page  $i$  lorsqu'il existe dans la page  $j$  un lien hypertextuel dont le but est la page  $i$ .

Pour tout  $1 \leq j \leq N$ , on note  $d_j$ , le nombre de pages vers lesquelles pointe la page  $j$ .

Lorsque  $d_j = 0$ , c'est-à-dire en l'absence de lien sur la page  $j$ , on pose  $A(j, j) = 1$  et  $A(i, j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ .

Lorsque  $d_j > 0$ , on pose  $A(i, j) = 1/d_j$  pour toute page  $1 \leq i \leq N$  vers laquelle pointe la page  $j$  et  $A(i, j) = 0$  sinon.

Étant donné un réel  $0 \leq \rho < 1$ , on définit la **matrice de Google**  $G = (G(i, j))_{1 \leq i, j \leq N}$  en posant

$$\forall 1 \leq i, j \leq N, \quad G(i, j) = \rho A(i, j) + \frac{1 - \rho}{N}. \quad (D)$$

Le *PageRank* de la page  $j$  est un nombre  $p(j)$  tel que la famille  $(p(j))_{1 \leq j \leq N}$  vérifie le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N p(i) = 1 \\ \forall 1 \leq i \leq N, \quad \sum_{j=1}^N G(i, j)p(j) = p(i) \geq 0. \end{array} \right. \quad (S)$$

L'objet de ce problème est de justifier que le système (S) admet une, et une seule, solution.

4. Estimer la proportion de coefficients non nuls dans la matrice  $A$ .

5. a. Vérifier que la matrice  $G$  est strictement positive.

5. b. Vérifier, en discutant sur la valeur de  $d_j$ , que

$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad \sum_{i=1}^N G(i, j) = 1.$$

Que peut-on en déduire ?

5. c. Démontrer que le système (S) admet un vecteur  $(p(j))_{1 \leq j \leq N}$  pour solution si, et seulement si, ce vecteur est un vecteur de probabilité invariant par  $G$ .

**Partie C. Exemple de matrices stochastiques**

6. Soit  $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , une matrice stochastique strictement positive : il existe deux réels  $0 < q, q' < 1$  tels que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - q & q' \\ q & 1 - q' \end{pmatrix}.$$

6. a. Déterminer l'ensemble des vecteurs  $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui sont invariants par  $Q$ .

6. b. Démontrer qu'il existe un unique vecteur de probabilité de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  invariant par  $Q$ . Expliciter ce vecteur, qu'on notera  $V_\infty$  par la suite.

6. c. Démontrer que

$$Q^n = \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1 - q - q')^n}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6. d. En déduire que la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qu'on reliera à  $V_\infty$ .

**Partie D. Existence d'un vecteur de probabilité invariant**

Dans cette partie, on suppose que  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est une matrice stochastique.

7. On note  $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Calculer  ${}^tQU$ .

8. Démontrer que 1 est une valeur propre de  $Q$ .

9. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ , une valeur propre de  $Q$  telle que  $|\lambda| = 1$  et  $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , un vecteur propre de  $Q$  associé à  $\lambda$ .

9. a. Démontrer que le vecteur  $Q|V| - |V|$  est positif.

9. b. En sommant les composantes du vecteur  $Q|V| - |V|$ , démontrer que le vecteur  $|V|$  est invariant par  $Q$ .

10. Démontrer qu'il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par  $Q$ .

**Partie E. Unicité du vecteur invariant**

Dans cette partie,  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est une matrice stochastique strictement positive. On suppose qu'il existe deux vecteurs de probabilité

$$V_\infty = (v_\infty(i))_{1 \leq i \leq N} \quad \text{et} \quad W_\infty = (w_\infty(i))_{1 \leq i \leq N}$$

dans  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  qui soient invariants par  $Q$ .

11. Soit  $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , un vecteur positif invariant par  $Q$ . Démontrer l'alternative suivante : ou bien  $V = 0$ , ou bien  $V$  est strictement positif.

12. a. Justifier l'existence de

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq N} \frac{w_\infty(i)}{v_\infty(i)}.$$

12. b. Démontrer que le vecteur  $V = W_\infty - \alpha V_\infty$  est invariant par  $Q$ ; qu'il est positif, mais pas strictement positif.

12. c. En déduire que  $W_\infty = V_\infty$  et conclure.

13. On revient à l'étude de l'indice *PageRank*.

13. a. Démontrer que le système (S) admet une, et une seule, solution et que

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad p(i) \geq \frac{1 - \rho}{N}.$$

13. b. En quoi le paramètre  $\rho$  est-il essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S) ?

**Partie F. Validation du modèle**

14. Soit  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , un vecteur tel que

$$\left| \sum_{i=1}^N v_i \right| = \sum_{i=1}^N |v_i|. \quad (E)$$

14. a. Soient  $x$  et  $y$ , deux réels tels que  $|x + y| = |x| + |y|$ . Démontrer que  $x$  et  $y$  sont de même signe.

14. b. Démontrer par récurrence que les coefficients  $v_i$  sont tous de même signe.

14. c. Comparer les vecteurs  $V$  et  $|V|$ .

© On suppose dans cette partie que  $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est une matrice stochastique strictement positive et on note  $V_\infty$ , l'unique vecteur de probabilité invariant par  $Q$ .

15. On étudie ici les valeurs propres de  $Q$ .

15. a. Démontrer que

$$\forall V \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R}), \quad \|QV\|_1 \leq \|V\|_1$$

et qu'il y a égalité dans le cas où le vecteur  $V$  est positif.

15. b. Démontrer que : si  $\lambda$  est une valeur propre réelle de la matrice  $Q$ , alors  $|\lambda| \leq 1$ .

⊙ Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ , une valeur propre de  $Q$  telle que  $|\lambda| = 1$  et

$$V = (v(i))_{1 \leq i \leq N} \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R}),$$

un vecteur propre de  $Q$  associé à  $\lambda$  tel que  $\|V\|_1 = 1$ .

15. c. Comparer  $|V|$  et  $V_\infty$ .

15. d. Vérifier que

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(1,j)v(j) \right| = \sum_{j=1}^N Q(1,j)|v(j)|.$$

15. e. En déduire que  $V$  est colinéaire à  $|V|$ , puis que  $\lambda = 1$ .

16. On suppose en outre que  $Q$  est diagonalisable pour étudier la convergence de la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

16. a. Démontrer que 1 est une valeur propre de  $Q$  de multiplicité 1 et que toutes les autres valeurs propres de  $Q$  sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue.

16. b. En déduire que la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $Q_\infty$ .

16. c. Démontrer que la matrice  $Q^n$  est stochastique pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire que  $Q_\infty$  est stochastique.

16. d. Démontrer que  $QQ_\infty = Q_\infty$  et en déduire que toutes les colonnes de  $Q_\infty$  sont égales à  $V_\infty$ .

16. e. Soit  $V_0 \in \mathfrak{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , un vecteur de probabilité. Démontrer que la suite  $(Q^n V_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice colonne

$$(p(i))_{1 \leq i \leq N}.$$

## Solution I ✿ Groupes de matrices

**1. a.** On vérifie que  $M \times M = M$ . Par conséquent, la multiplication matricielle est bien une opération interne sur  $E_1$ , associative (puisque'elle est associative sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  qui contient  $E_1$ ). De plus,  $M$  est neutre dans  $E_1$  pour la multiplication matricielle et est son propre inverse. L'ensemble  $E_1$  est donc un groupe pour la multiplication matricielle et ce groupe est évidemment commutatif.

**1. b.** Soient  $M_1$  et  $M_2$ , deux éléments de  $E_2$ . Il existe donc deux matrices  $A$  et  $B$  dans  $GL_r(\mathbb{R})$  telles que

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} B & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

D'après les règles du calcul par blocs,

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} AB & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in E_2$$

puisque  $AB \in GL_r(\mathbb{R})$  (car  $GL_r(\mathbb{R})$  est un groupe pour la multiplication matricielle). Donc la multiplication matricielle est bien une opération interne et associative sur  $E_2$ .

✿ La matrice  $I_r$  est l'élément neutre de  $GL_r(\mathbb{R})$  donc

$$J_2 = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in E_2.$$

Pour toute matrice  $M \in E_2$ , il existe  $A \in GL_r(\mathbb{R})$  telle que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et d'après les calculs précédents,

$$M J_2 = J_2 M = \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = M,$$

donc la matrice  $J_2$  est un élément neutre pour la multiplication matricielle dans  $E_2$ .

✿ Enfin, pour tout  $M \in E_2$ , il existe  $A \in GL_r(\mathbb{R})$  telle que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Comme  $GL_r(\mathbb{R})$  est un groupe de matrices, il existe une matrice  $A^{-1} \in GL_r(\mathbb{R})$  telle que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_r$ . Par conséquent,

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in E_2$$

et d'après les calculs précédents,

$$MM' = M'M = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} = J_2,$$

donc chaque élément  $M$  de  $E_2$  admet un symétrique dans  $E_2$  pour la multiplication matricielle.

L'ensemble  $E_2$  est donc bien un groupe pour la multiplication matricielle (ce groupe est commutatif si, et seulement si,  $r = 1$ ).

**1. c.** On remarque pour commencer que  $J^2 = nJ$ .

✿ Quelles que soient les matrices  $M_1$  et  $M_2$  dans  $E_3$ , il existe deux réels  $k > 0$  et  $\ell > 0$  tels que  $M_1 = kJ$  et  $M_2 = \ell J$ . Alors

$$M_1 M_2 = (k\ell n)J \in E_3$$

puisque  $k\ell n > 0$ . Donc la multiplication matricielle est bien une opération interne et associative sur  $E_3$ .

✿ Il est clair que la matrice  $\frac{1}{n}J$  appartient à  $E_3$  et pour tout  $k > 0$ ,

$$(kJ) \left( \frac{1}{n}J \right) = \left( \frac{1}{n}J \right) (kJ) = kJ,$$

donc la matrice  $\frac{1}{n}J$  est bien un élément neutre pour la multiplication matricielle dans  $E_3$ .

✿ Pour toute matrice  $M \in E_3$ , il existe  $k > 0$  tel que  $M = kJ$  et il est clair que la matrice

$$M' = \frac{1}{kn^2}J$$

appartient à  $E_3$ . Or

$$(kJ) \left( \frac{1}{kn^2}J \right) = \left( \frac{1}{kn^2}J \right) (kJ) = \frac{1}{n}J,$$

donc la matrice  $M'$  est bien un symétrique de  $M$  pour la multiplication matricielle dans  $E_3$ .

L'ensemble  $E_3$  est donc bien un groupe (évidemment commutatif) pour la multiplication matricielle.

**2. a.** En tant qu'élément neutre pour la multiplication, la matrice  $1_G$  vérifie en particulier

$$1_G \times 1_G = 1_G.$$

C'est donc une matrice de projection.

**2. b.** Rappelons que  $\text{Im}(PQ) \subset \text{Im} P$ , quelles que soient les matrices  $P$  et  $Q$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

✿ Comme  $1_G$  est l'élément neutre pour la multiplication,

$$1_G \times A = A,$$

ce qui prouve que  $\text{Im} A \subset \text{Im}(1_G)$ .

✿ En notant  $B$ , l'inverse de  $A$  (pour la loi du groupe considéré), on a

$$A \times B = 1_G,$$

ce qui prouve que  $\text{Im}(1_G) \subset \text{Im} A$ .

✿ Ainsi  $\text{Im}(1_G) = \text{Im} A$  et en particulier, toutes les matrices du groupe  $(G, \times)$  ont même rang.

**3.** Comme  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On sait que l'application

$$\Phi = [M \mapsto P^{-1}MP]$$

est un automorphisme d'algèbre de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $H$ , l'image de  $G$  par  $\Phi$  :

$$H = \{P^{-1}MP, M \in G\}.$$

Comme  $G$  est stable par multiplication, l'ensemble  $H$  est lui aussi stable par multiplication. En outre, il est facile de vérifier que, si  $1_G$  est neutre pour la multiplication dans  $G$ , alors  $\Phi(1_G)$  est neutre pour la multiplication dans  $H$  et que, si  $M'$  est le symétrique de  $M$  dans  $G$ , alors  $\Phi(M')$  est le symétrique de  $\Phi(M)$  dans  $H$ .

Ainsi, l'ensemble  $H$  est un groupe pour la multiplication matricielle ; ce groupe contient la matrice  $B = \Phi(A)$  et l'application  $\Phi$  induit par restriction un isomorphisme de groupes de  $G$  sur  $H$ .

## Solution II ✿ Algorithme PageRank

### Partie A. Préliminaires

1. b. Si  $\|V\|_1 = 0$ , alors

$$\sum_{i=1}^N |v(i)| = 0.$$

Or une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc  $V$  est bien le vecteur nul.

✿ Un vecteur propre n'étant, par définition, jamais nul, si  $V$  est un vecteur propre de la matrice  $Q$ , alors  $\|V\|_1 \neq 0$  et comme  $\|V\|_1 \geq 0$ , on en déduit que  $\|V\|_1 > 0$ .

2. a. Soit  $Q = (q_{i,j}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ , une matrice stochastique et  $V = (v_i) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ , un vecteur de probabilité.

Quel que soit  $1 \leq i \leq N$ , la  $i$ -ème coordonnée de  $QV$  est

$$\sum_{j=1}^N q_{i,j} v_j.$$

Ce réel est positif puisque les  $q_{i,j}$  et les  $v_j$  sont tous positifs. La somme de ces réels est

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N q_{i,j} \right) v_j = \sum_{j=1}^N v_j = 1.$$

Donc le produit  $QV$  est bien un vecteur de probabilité.

✿ Réciproquement :

Par définition, une matrice est stochastique si, et seulement si, ses colonnes sont des vecteurs de probabilité. Or les colonnes d'une matrice  $Q$  sont les produits  $QV$  lorsque la matrice colonne  $V$  parcourt la base canonique et les vecteurs de la base canonique sont tous des vecteurs de probabilité.

2. b. Par hypothèse, les colonnes de  $Q_2$  sont des vecteurs de probabilité. Or les colonnes de  $Q_1 Q_2$  sont les produits de  $Q_1$  par les différentes colonnes de  $Q_2$ . D'après la question précédente, les colonnes de  $Q_1 Q_2$  sont des vecteurs de probabilité, donc le produit  $Q_1 Q_2$  est bien une matrice stochastique.

3. a. D'après les règles du calcul matriciel, les matrices  $AQ_n$  et  $AQ_\infty$  appartiennent à  $\mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$  ; les matrices  $Q_n B$  et  $Q_\infty B$  appartiennent à  $M_{N,p}(\mathbb{R})$ .

✿ Soient  $1 \leq i, j \leq N$ . Par hypothèse, la suite de terme général  $Q_n(k, j)$  converge vers  $Q_\infty(k, j) \in \mathbb{R}$ , quel que soit  $1 \leq k \leq N$ . Alors la suite de terme général

$$(AQ_n)(i, j) = \sum_{k=1}^N A(i, k) Q_n(k, j)$$

converge, en tant que combinaison linéaire de suites convergentes, vers

$$\sum_{k=1}^N A(i, k) Q_\infty(k, j) = (AQ_\infty)(i, j).$$

Donc la suite  $(AQ_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge bien vers  $AQ_\infty$ .

De manière analogue, la suite  $(Q_n B)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Q_\infty B$ .

3. b. Quels que soient les indices  $1 \leq i, j \leq N$ , le coefficient  $Q_\infty(i, j)$  est positif, en tant que limite de la suite de terme général positif  $Q_n(i, j)$ .

Une somme de  $N$  suites convergentes est convergente et sa limite est la somme des  $N$  limites. Ainsi, quel que soit l'indice  $1 \leq j \leq N$ ,

$$\sum_{i=1}^N Q_\infty(i, j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N Q_n(i, j) = 1.$$

La matrice  $Q_\infty$  est donc une matrice stochastique.

### Partie B. Google et l'algorithme PageRank

4. En estimant à  $10^2$ , le nombre moyen de liens hypertextuels par page, la proportion de coefficients non nuls dans  $A$  est de l'ordre de  $10^{-8} = 10^2/10^{10}$ . La quasi-totalité des coefficients de  $A$  sont donc nuls : on dit que  $A$  est une **matrice creuse** (*sparse matrix*).

5. a. Comme tous les coefficients de  $A$  sont positifs et que  $\rho \geq 0$ ,

$$\forall 1 \leq i, j \leq N, \quad G(i, j) = \rho A(i, j) + \frac{1-\rho}{N} \geq \frac{1-\rho}{N} > 0$$

puisque  $\rho < 1$ . Donc la matrice  $G$  est strictement positive.

5. b. Si  $d_j = 0$ , alors

$$\sum_{i=1}^N G(i, j) = \sum_{i=1}^N \left( \rho \delta_{i,j} + \frac{1-\rho}{N} \right) = \rho + N \frac{1-\rho}{N} = 1.$$

Si  $d_j > 0$ , alors on note  $E_j$ , l'ensemble (non vide) des indices  $1 \leq i \leq N$  tels que la page  $j$  pointe vers la page  $i$  et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N G(i, j) &= \sum_{i \in E_j} \left( \frac{\rho}{d_j} + \frac{1-\rho}{N} \right) + \sum_{i \notin E_j} \frac{1-\rho}{N} \\ &= \rho \frac{\#(E_j)}{d_j} + \sum_{i=1}^N \frac{1-\rho}{N} \\ &= \rho + N \frac{1-\rho}{N} = 1 \end{aligned}$$

puisque le cardinal de  $E_j$  est, par définition, égal à  $d_j$ .

Bref, quelle que soit la valeur de  $d_j$ ,

$$\sum_{i=1}^N G(i, j) = 1.$$

✿ Comme  $G$  est une matrice strictement positive par 5.a., on en déduit que  $G$  est une matrice stochastique.

5. c. Soit  $V = (p(i))_{1 \leq i \leq n}$ , une solution de (S). Par hypothèse, c'est un vecteur positif et par conséquent,

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^N p(i) = 1$$

d'après (S). Donc  $V$  est un vecteur de probabilité.

D'après les règles du calcul matriciel, la relation

$$\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^N G(i, j)p(j) = p(i)$$

signifie que  $GV = V$  et donc que  $V$  est un vecteur invariant par  $G$ .

Les calculs précédents montrent que, réciproquement, un vecteur de probabilité invariant par  $G$  est bien une solution du système (S).

**Partie C. Exemple de matrices stochastiques**

6. a. Le vecteur  $V$  est invariant par  $Q$  si, et seulement si, il appartient au noyau de

$$Q - I_2 = \begin{pmatrix} -q & q' \\ q & -q' \end{pmatrix}.$$

Comme  $q$  et  $q'$  sont strictement positifs, la matrice  $(Q - I_2)$  n'est pas nulle et son rang est supérieur à 1 ; d'autre part, pour la même raison, le vecteur

$$V_0 = \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$$

n'est pas nul et vérifie clairement  $(Q - I_2)V = 0$ , donc le rang de  $(Q - I_2)$  est inférieur à 1.

Ainsi, le rang de  $(Q - I_2)$  est égal à 1 et son noyau, qui est l'ensemble des vecteurs invariants par  $Q$ , est la droite vectorielle de  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  dirigé par  $V_0$ .

6. b. Nous allons prouver l'existence et l'unicité en raisonnant par analyse et synthèse.

ANALYSE (UNICITÉ).— Soit  $V_\infty$ , un vecteur de probabilité invariant par  $Q$ . D'après 6.a., il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$V_\infty = \begin{pmatrix} tq' \\ tq \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad tq' + tq = 1.$$

La seule possibilité est donc de choisir  $t = 1/(q + q')$ .

SYNTHÈSE (EXISTENCE).— Réciproquement, comme  $q$  et  $q'$  sont strictement positifs, alors  $(q + q') > 0$ , donc le vecteur

$$\frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$$

est un vecteur de probabilité (coefficients positifs, somme des coefficients égale à 1) invariant par  $Q$ .

6. c. On vérifie sans peine que

$$Q \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$$

et que

$$Q \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = (1 - q - q') \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix},$$

ce qui permet de démontrer par récurrence que

$$Q^n = \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1 - q - q')^n}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

REMARQUE.— Les calculs matriciels ci-dessus montrent que la matrice  $Q$  est diagonalisable, parce qu'elle admet deux valeurs propres distinctes : 1 et  $1 - (q + q')$ . Les matrices qui apparaissent dans la décomposition de  $Q^n$  :

$$\frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

sont les projecteurs spectraux respectivement associés à 1 et à  $1 - (q + q')$ .

6. d. Comme  $0 < q, q' < 1$ , alors  $-1 < 1 - (q + q') < 1$ , donc la suite géométrique de raison  $(1 - q - q')$  tend vers 0 et par conséquent, la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice

$$\frac{1}{q + q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$$

dont les deux colonnes sont égales à  $V_\infty$ .

REMARQUE.— La matrice limite est clairement une matrice stochastique.

**Partie D. Existence d'un vecteur de probabilité invariant**

7. Pour tout  $1 \leq i \leq N$ , le  $i$ -ème coefficient de  ${}^tQU$  est égal à

$$\sum_{j=1}^N [{}^tQ(i, j) \times 1] = \sum_{j=1}^N Q(j, i) = 1$$

(puisque la matrice  $Q$  est stochastique), ce qui montre que  ${}^tQU = U$ .

8. D'après 7., le vecteur *non nul*  $U$  vérifie  ${}^tQU = U$ , donc c'est un vecteur propre de  ${}^tQ$  associé à la valeur propre 1. Comme une matrice et sa transposée ont même spectre, on en déduit que 1 est une valeur propre de  $Q$ .

9. a. La relation  $QV = V$  se traduit par

$$\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^N Q(i, j)v(j) = \lambda v(i).$$

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\sum_{j=1}^N Q(i, j)|v(j)| \geq \left| \sum_{j=1}^N Q(i, j)v(j) \right| \geq |\lambda v(i)| = |v(i)|$$

puisque les  $Q(i, j)$  sont positifs et que  $|\lambda| = 1$ . L'inégalité précédente montre que

$$\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^N Q(i, j)|v(j)| - |v(i)| \geq 0$$

et donc que le vecteur  $Q|V| - |V|$  est une matrice colonne positive.

9. b. Comme le vecteur  $Q|V| - |V|$  est positif, alors

$$\|Q|V| - |V|\|_1 = \sum_{i=1}^N \left[ \underbrace{\sum_{j=1}^N Q(i,j)|v(j)| - |v(i)|}_{\geq 0} \right].$$

Mais comme  $Q$  est une matrice stochastique,

$$\begin{aligned} \|Q|V| - |V|\|_1 &= \sum_{j=1}^N \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^N Q(i,j)}_{=1} \right] |v(j)| - \sum_{i=1}^N |v(i)| \\ &= \sum_{j=1}^N |v(j)| - \sum_{i=1}^N |v(i)| = \|V\|_1 - \|V\|_1 = 0. \end{aligned}$$

D'après 1.b., le vecteur  $Q|V| - |V|$  est égal au vecteur nul, donc  $|V|$  est invariant par  $Q$ .

10. Le vecteur  $V$  est un vecteur non nul, donc  $\|V\|_1 > 0$  par 1.b. Comme le vecteur  $|V|$  est un vecteur positif et invariant par  $Q$ , le vecteur  $\frac{1}{\|V\|_1}|V|$  est aussi un vecteur positif et invariant par  $Q$ . D'après 1.a.,

$$\left\| \frac{1}{\|V\|_1}|V| \right\|_1 = \frac{\|V\|_1}{\|V\|_1} = 1$$

puisque, de façon évidente,  $\|V\|_1 = \||V|\|_1$ .

Le vecteur  $\frac{1}{\|V\|_1}|V|$  est donc un vecteur de probabilité invariant par  $Q$ .

**Partie E. Unicité du vecteur invariant**

11. Soit  $V$ , un vecteur positif invariant par  $Q$ . Si  $V$  n'est pas strictement positif, il existe un indice  $i_0$  tel que

$$\sum_{j=1}^N Q(i_0, j)v(j) = (QV)(i_0) = v(i_0) = 0.$$

Tous les  $v(j)$  sont positifs, tous les  $Q(i_0, j)$  sont strictement positifs et si une somme de termes positifs est nulle, c'est que tous ses termes sont nuls. Par conséquent, tous les  $v(j)$  sont nuls et  $V$  est le vecteur nul.

REMARQUE.— La méthode classique pour démontrer l'alternative : ou bien  $A$ , ou bien  $B$ , consiste comme ici à supposer le contraire de  $A$  pour en déduire  $B$ .

12. a. Comme  $V_\infty$  est un vecteur de probabilité,

$$\|V_\infty\|_1 = \sum_{i=1}^N v_\infty(i) = 1$$

donc les  $v_\infty(i)$  ne sont pas tous nuls. Le vecteur  $V_\infty$  est donc un vecteur positif invariant par  $Q$  et non nul. Par 11., c'est un vecteur strictement positif, donc tous les quotients  $w_\infty(i)/v_\infty(i)$  ont un sens et  $\alpha$  est bien défini comme minimum d'une famille finie de réels.

12. b. L'ensemble des vecteurs invariants par  $Q$  étant stable par combinaison linéaire (c'est un sous-espace propre de  $Q$ ) et comme  $V_\infty$  et  $W_\infty$  sont invariants par  $Q$ , alors  $V$  est aussi un vecteur invariant par  $Q$ .

• Par définition d'un minimum,

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq N, & \alpha \leq \frac{w_\infty(i)}{v_\infty(i)} \\ \exists 1 \leq i_0 \leq N, & \alpha = \frac{w_\infty(i_0)}{v_\infty(i_0)}. \end{cases}$$

Comme les  $v_\infty(i)$  sont strictement positifs, tous les coefficients de  $V = W_\infty - \alpha V_\infty$  sont positifs :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad w_\infty(i) - \alpha v_\infty(i) \geq 0$$

et l'un d'eux au moins est nul :

$$w_\infty(i_0) - \alpha v_\infty(i_0) = 0.$$

Le vecteur  $V$  est donc un vecteur positif mais pas strictement positif.

12. c. Le vecteur  $V$  est un vecteur positif invariant par  $Q$  qui n'est pas strictement positif [12.b.], donc  $V$  est le vecteur nul [11.] et  $W_\infty = V_\infty$ .

La matrice admet donc un vecteur de probabilité invariant [10.], et un seul.

13. a. La matrice  $G$  est une matrice stochastique [5.b.] et strictement positive [5.a.]. Il existe donc un, et un seul, vecteur de probabilité invariant par la matrice  $G$  [12.c.], ce qui signifie que la système (S) admet une, et une seule, solution [5.c.].

D'après le système (S), pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\begin{aligned} p(i) &= \sum_{j=1}^N \left[ \rho A(i, j) + \frac{1-\rho}{N} \right] p(j) \\ &= \sum_{j=1}^N \underbrace{\rho A(i, j)p(j)}_{\geq 0} + \frac{1-\rho}{N} \underbrace{\sum_{j=1}^N p(j)}_{=1} \\ &\geq \frac{1-\rho}{N} > 0. \end{aligned}$$

13. b. Avec  $\rho = 1$ , on pourrait obtenir la matrice

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est stochastique et strictement positive, mais admet deux vecteurs de probabilité invariants :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Cette matrice modélise un réseau de 3 pages dont l'une est isolée des deux autres !)

Plus généralement, lorsqu'il existe des parties du réseau isolées du reste, la matrice de transition est diagonale par blocs (chaîne de Markov réductible), il ne peut y avoir unicité du vecteur de probabilité invariant.

L'introduction du paramètre  $0 \leq \rho < 1$  sert à passer d'une matrice de transition  $A$  réductible à une matrice de transition  $G$  irréductible : si on ne peut passer d'une partie isolée à une autre partie du réseau en suivant un lien, on peut quand même saisir l'adresse à la main...

**Partie F. Validation du modèle**

**14. a.** Si  $x$  et  $y$  ne sont pas de même signe, on peut supposer que  $y < 0 < x$ . Dans ce cas,

$$|x| + |y| = x - y.$$

Si  $x + y \geq 0$ , alors

$$|x + y| = x + y < x - y = |x| + |y|$$

puisque  $y < 0$ . Si, au contraire,  $x + y \leq 0$ , alors

$$|x + y| = -x - y < x - y = |x| + |y|$$

puisque  $x > 0$ . Bref, quel que soit le signe de  $(x + y)$ ,

$$|x + y| < |x| + |y|$$

et, par contraposée, si  $|x + y| = |x| + |y|$ , alors  $x$  et  $y$  sont de même signe.

**14. b.** Faisons l'hypothèse de récurrence suivante, qui est vérifiée pour  $N = 2$  d'après **14. a.**

**H.R.** Il existe un entier  $N \geq 2$  tel que l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^N v_k \right| = \sum_{k=1}^N |v_k|$$

implique que tous les réels  $v_k$  sont de même signe.

Considérons  $(v_k)_{1 \leq k \leq N+1} \in \mathbb{R}^{N+1}$  tel que

$$\left| \sum_{k=1}^{N+1} v_k \right| = \sum_{k=1}^{N+1} |v_k|$$

et posons  $S_N = \sum_{k=1}^N v_k$ . On déduit de notre hypothèse et de l'inégalité triangulaire que

$$\sum_{k=1}^{N+1} |v_k| = |S_N + v_{N+1}| \leq |S_N| + |v_{N+1}|$$

et, toujours de l'inégalité triangulaire, que

$$|S_N| + |v_{N+1}| = \left| \sum_{k=1}^N v_k \right| + |v_{N+1}| \leq \sum_{k=1}^N |v_k| + |v_{N+1}|.$$

Les termes extrêmes de cet encadrement étant égaux, on en déduit que

$$|S_N + v_{N+1}| = |S_N| + |v_{N+1}|$$

et que

$$\left| \sum_{k=1}^N v_k \right| = \sum_{k=1}^N |v_k|.$$

→ D'après **14. a.**,  $S_N$  et  $v_{N+1}$  sont de même signe.

→ D'après l'hypothèse de récurrence, les  $v_1, \dots, v_N$  sont tous de même signe et leur signe est donc celui de  $S_N$ . Donc  $v_{N+1}$  est de même signe que  $v_1, \dots, v_N$ . L'hypothèse de récurrence est donc héréditaire et le résultat est démontré pour tout  $N \geq 2$ .

**14. c.** Par **14. b.**, les  $v_i$  sont tous de même signe. Deux cas se présentent :

→ Si tous les  $v_i$  sont positifs, alors  $V = |V|$ .

→ Si tous les  $v_i$  sont négatifs, alors  $V = -|V|$ .

**15. a.** D'après les règles du calcul matriciel,

$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N Q(i, j)v(j) \right|.$$

Par inégalité triangulaire, comme tous les  $Q(i, j)$  sont positifs,

$$\sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N Q(i, j)v(j) \right| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q(i, j)|v(j)|.$$

Et comme la matrice  $Q$  est stochastique,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q(i, j)|v(j)| &= \sum_{j=1}^N \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^N Q(i, j)}_{=1} \right] |v(j)| \\ &= \sum_{j=1}^N |v(j)| = \|V\|_1. \end{aligned}$$

→ Si les  $v(j)$  sont tous positifs, l'inégalité triangulaire est en fait une égalité et les calculs précédents montrent que  $\|QV\|_1 = \|V\|_1$ .

**15. b.** Comme  $\lambda$  est une valeur propre de  $Q$ , il existe un vecteur  $V \neq 0$  tel que  $QV = \lambda V$ . D'après **15. a.** et **1. a.**,

$$\|V\|_1 \geq \|QV\|_1 = \|\lambda V\|_1 = |\lambda| \|V\|_1.$$

Comme  $V \neq 0$ , alors  $\|V\|_1 > 0$  par **1. b.**, donc  $|\lambda| \leq 1$ .

**15. c.** Comme  $\|V\|_1 = 1$ , le vecteur positif  $|V|$  est un vecteur de probabilité. Par **9. b.**, c'est aussi un vecteur invariant par  $Q$ . Par **12. c.**, les vecteurs  $|V|$  et  $V_\infty$  sont égaux.

**15. d.** Comme  $V$  est un vecteur propre de  $Q$  associé à une valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| = 1$ , alors

$$|QV| = |\lambda V| = |V|$$

et  $Q|V| = |V|$  d'après **9. b.**, donc  $|QV| = Q|V|$ , ce qui se traduit par

$$\left| \sum_{j=1}^N Q(i, j)v(j) \right| = \sum_{j=1}^N \underbrace{Q(i, j)}_{\geq 0} |v(j)| = \sum_{j=1}^N |Q(i, j)v(j)|$$

pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

**15. e.** On déduit alors de **14. b.** que les réels  $Q(1, j)v(j)$  sont tous de même signe. Comme la matrice  $Q$  est strictement positive, on en conclut que les  $v(j)$  sont tous de même signe et donc  $V = \pm|V|$  [**14. c.**]

Mais  $|V|$  est un vecteur propre de  $Q$  associé à la valeur propre 1 par **15. c.**, donc  $V$  est aussi un vecteur propre de  $Q$  associé à la valeur propre 1.

**16. a.** Par **10.**, le vecteur de probabilité  $V_\infty$  (non nul!) est un vecteur propre de  $Q$  associé à 1, donc 1 est bien une valeur propre de  $Q$ .

→ Par **15. b.**, toute valeur propre  $\lambda$  de  $Q$  est inférieure à 1 en valeur absolue et par **15. e.**, si  $|\lambda| = 1$ , alors  $\lambda = 1$ . Donc les valeurs propres de  $Q$  distinctes de 1 sont toutes strictement inférieures à 1 en valeur absolue.

→ Par **15. c.** et **15. e.**, si  $V$  est un vecteur propre de  $Q$  associé à 1, alors  $V$  est colinéaire à  $V_\infty$ , donc le sous-espace

propre de  $Q$  associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle dirigée par  $V_\infty$ . Comme la matrice  $Q$  est diagonalisable par hypothèse, la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $Q$  est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. C'est donc une valeur propre simple.

**16. b.** D'après **16. a.**, il existe des scalaires  $\lambda_2, \dots, \lambda_N$  tels que

$$\forall 2 \leq k \leq N, \quad |\lambda_k| < 1$$

et une matrice inversible  $P \in GL_N(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}QP = \text{Diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_N).$$

On en déduit que les matrices

$$P^{-1}Q^n P = \text{Diag}(1, \lambda_2^n, \dots, \lambda_N^n)$$

convergent vers la matrice

$$D = \text{Diag}(1, 0, \dots, 0).$$

Par **3. a.**, les matrices  $Q^n$  convergent donc vers la matrice  $Q_\infty = PDP^{-1}$ .

**16. c.** Soient  $A$  et  $B$ , deux matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ .

Quels que soient les indices  $1 \leq i, j \leq N$ ,

$$\sum_{k=1}^N \underbrace{A(i, k)}_{\geq 0} \underbrace{B(k, j)}_{\geq 0} \geq 0$$

donc le produit  $AB$  est une matrice positive.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N A(i, k) B(k, j) \right] &= \sum_{k=1}^N \left[ B(k, j) \left( \underbrace{\sum_{i=1}^N A(i, k)}_{=1} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N B(k, j) = 1, \end{aligned}$$

donc le produit  $AB$  est une matrice stochastique.

Comme  $Q$  est une matrice stochastique et que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique, il est clair que  $Q^n$  est une matrice stochastique pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (par récurrence) et aussi pour  $n = 0$ , puisque la matrice  $I_N$  est évidemment stochastique.

• Considérons une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de matrices stochastiques qui convergent vers une matrice  $A_\infty$ .

Quels que soient les indices  $1 \leq i, j \leq N$ , le coefficient  $A_\infty(i, j)$  est la limite de la suite de terme général *positif*  $A_n(i, j)$ , donc  $A_\infty(i, j) \geq 0$  et la matrice  $A_\infty$  est positive.

D'autre part, quel que soit  $1 \leq j \leq N$ ,

$$\sum_{i=1}^N A_\infty(i, j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^N A_n(i, j)}_{=1} = 1$$

donc la matrice  $A_\infty$  est stochastique.

Comme toutes les matrices  $Q^n$  sont stochastiques et que la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Q_\infty$ , la matrice  $Q_\infty$  est une matrice stochastique.

**16. d.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il est clair que  $Q^{n+1} = QQ^n$ . Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , les matrices  $Q^n$  convergent

vers  $Q_\infty$ , donc les matrices  $Q^{n+1}$  convergent aussi vers  $Q_\infty$  (suite extraite d'une suite convergente) et les produits  $QQ^n$  convergent vers  $QQ_\infty$  par **3. a.** On en déduit que  $Q_\infty = QQ_\infty$ .

• Par **2.**, les colonnes de  $Q_\infty$  sont des vecteurs de probabilité et la relation  $Q_\infty = QQ_\infty$  montre que ces vecteurs sont invariants par  $Q$ . On déduit alors de **12. c.** que toutes les colonnes de  $Q$  sont égales à  $V_\infty$ , l'unique vecteur de probabilité invariant par  $Q$ .

**16. e.** Par **16. b.** et **3. a.**, la suite de matrices colonnes  $Q^n V_0$  converge vers la matrice colonne  $Q_\infty V_0$ . Or toutes les colonnes de  $Q_\infty$  sont égales à  $V_\infty$  et  $V_0$  est un vecteur de probabilité, donc

$$Q_\infty V_0 = \sum_{i=1}^N [v_0(i) V_\infty] = \left( \sum_{i=1}^N v_0(i) \right) V_\infty = V_\infty.$$

La suite  $(Q^n V_0)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers la matrice colonne  $V_\infty$ , qui est l'unique solution de (S) d'après **5. c.** et **12. c.**

REMARQUE.— Le vecteur de probabilité limite ne dépend pas du vecteur de probabilité initial  $V_0$ .

### Modèle markovien homogène du surfeur

On modélise le comportement d'un utilisateur du web par une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . La valeur de  $X_0$  représente la première page visitée et  $X_n$ , la page visitée au bout de  $n$  changements de page (que l'utilisateur ait changé de page en suivant un lien hypertextuel ou d'une autre manière).

On suppose que la loi des variables aléatoires  $X_n$  vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad \mathbf{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j]) = G(j, i).$$

(On rappelle que  $\mathbf{P}_B(A)$  désigne la probabilité conditionnelle de l'événement  $A$  sachant  $B$ .)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$V_n = (\mathbf{P}(X_n = i))_{1 \leq i \leq N}$$

et on **admet** que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de vecteurs de probabilité tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = G V_n,$$

de telle sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = G^n V_0.$$

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **chaîne de Markov homogène** qui admet  $G$  pour **matrice de transition**. Le fait que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le vecteur de probabilité  $V_\infty$  signifie que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X_\infty$  telle que

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \mathbf{P}(X_\infty = i) = v_\infty(i) = p(i).$$

C'est en ce sens que le *PageRank*  $p(i)$  mesure la probabilité pour qu'un surfeur se trouve sur la page  $i$ .